幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/14

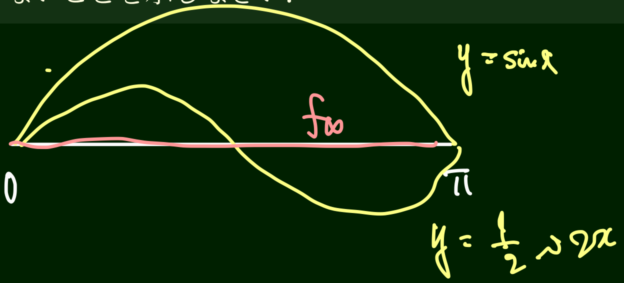
問題 1-1

問題

$f_n(x)$ の graph

区間 $J=[0,\pi]$ 上の C^∞-級関数 $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin nx$ $(n=1,2,\dots)$ と定数関数 $f_\infty(x)=0$ を考える.

1. 関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に一様収束することを示しなさい.
2. 曲線 $\gamma_n(x) := {}^t(x, f_n(x))$ の弧長は $\gamma_\infty(x) = {}^t(x,0)$ の弧長に収束しないことを示しなさい.



$$\gamma(x) = {}^t(x,\ f(x)) \qquad \frac{d\gamma}{dx}(x) = {}^t(1,\ f'(x))$$

$$\ell(\gamma) = \int_*^* \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \qquad \xi \neq \varepsilon$$

$$f'_\infty(x) = 0$$

$$\ell(\gamma_n) = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 nx}\ dx \qquad \xi = nx$$

$$= \int_0^{n\pi} \frac{1}{n}\sqrt{1 + \cos^2\xi}\ d\xi \quad (C^1\text{-収束})$$

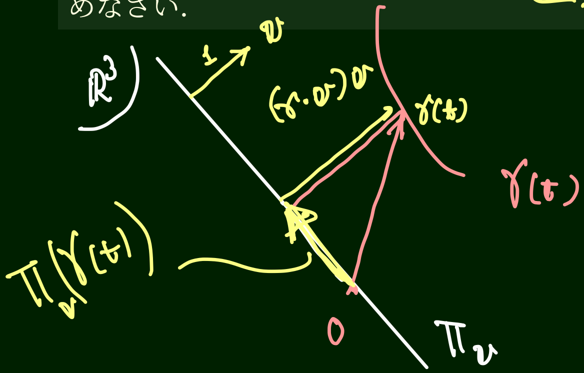
nによらない

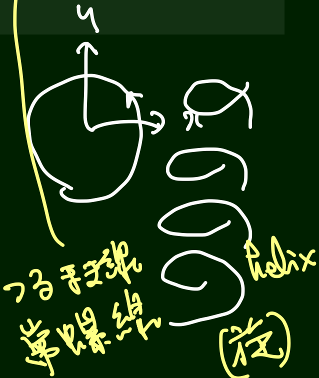
$$= \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2\xi}\ d\xi > \pi = \ell(\gamma_\infty)$$

問題 1-2

問題

$\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，原点を通り $\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への正射影を $\pi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ と書く．零でない二つの定数 a, b に対して曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto {}^t(a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ の正射影 $\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) := \pi_{\boldsymbol{v}} \circ \gamma(t)$ が $t=0$ に特異点をもつような $\boldsymbol{v}$ を求めなさい．



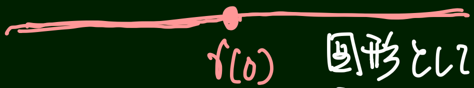


$\gamma(t)$ $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ となる点を特異点という

① $\gamma(u) = {}^t(u^3, 0)$

$\dot{\gamma}(0) = {}^t(3u^2, 0)\Big|_{u=0}$

$= {}^t(0, 0)$

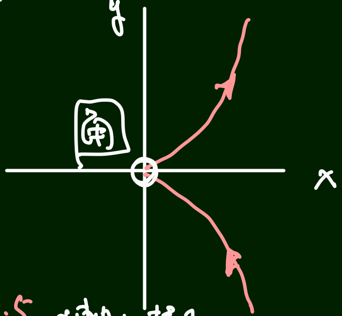


図形としては滑らか。

$u = 0$ は特異点

② $\gamma(t) = {}^t(t^2, t^3)$

$\dot{\gamma}(0) = 0$



$y \geq 0$

$y = \sqrt{x^3}$

$= x^{1.5}$ x軸に接する

$$\gamma(t) = {}^t(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

$$\gamma_v(t) = \pi_v \circ \gamma(t) = \gamma(t) - (\gamma(t)\cdot v)\,v$$

$$\dot\gamma_v = \dot\gamma - (\dot\gamma\cdot v)\,v$$

$$|\dot\gamma_v|^2 = |\dot\gamma|^2\,|v|^2 - (\dot\gamma\cdot v)^2 \qquad (|v|=1)$$

$$\geq 0$$ シュワルツ

等号条件 : $\dot\gamma \,/\!/\, v$

$$v = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}0\\ a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(t) = {}^t(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$

$$\dot\gamma(0) = {}^t(0,\ a,\ b)$$

正則点 $(\dot{\gamma}(t) \neq 0)$ では "接線" が定まる

"なめらか" な曲線

問題 1-3

問題

$J=(0,\infty)$ 上で定義された曲線 $\gamma(t)={}^t(\operatorname{sech} t, t-\tanh t)$ の弧長パラメータ表示を求めなさい.

ℝ全体でwell-def.

$$\tilde{\gamma}(s)=\gamma(t(s))$$

$$|\tilde{\gamma}'(s)|=1$$

弧長パラメータ表示

$$\dot{\gamma}(t)={}^t(-\tanh t\operatorname{sech} t,\ 1-\operatorname{sech}^2 t)$$

$$={}^t(-\tanh t\operatorname{sech} t,\ \cancel{1}-(\cancel{1}-\tanh^2 t))$$

$$=\tanh t\,{}^t(-\operatorname{sech} t,\ \tanh t)$$

$t=0$ はよくない点

$$\dot{\gamma} = \tanh t\,(\underline{-\operatorname{sech} t \ \tanh t})$$

└ 長さ 1

$$|\dot{\gamma}| = \tanh t \qquad (t > 0)$$

$$\int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(u)|\,du = \int_{t_0}^{t} \tanh u \, du$$

$t_0 = 0$

$$s = \log \cosh t - \cancel{\log \cosh t_0}$$

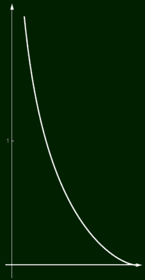
$$e^s = \cosh t \qquad t = \cosh^{-1} e^s$$

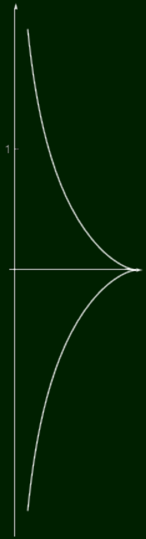
$$\tanh t = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 t}} \qquad = \log\left(e^s + \sqrt{e^s - 1}\right)$$

$$\gamma = (\operatorname{sech} t,\ t - \tanh t)$$

$$\tilde{\gamma} = \left(e^{-s},\ \log\left(e^s + \sqrt{e^s - 1}\right) - \sqrt{1 - \cancel{e^{2s}}}\right) \quad e^{2s}$$

追跡線 tractrix





とんい点,

特異点

定義 (定義 1.10)

曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ において $\dot\gamma(t_0) = \mathbf{0}$ が成り立つとき t_0 をパラメータ表示 γ の特異点という．特異点をもたないパラメータ表示を曲線の正則なパラメータ表示，略して正則曲線という．とくに $|\dot\gamma| = 1$ のとき弧長パラメータ表示という．

弧長パラメータ

曲線のパラメータ表示 $\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ が
弧長パラメータ表示であるとは，$|\gamma'(s)| = 1$ が各 $s \in J$ に対して
成り立つことである．このとき s を弧長パラメータという．

命題

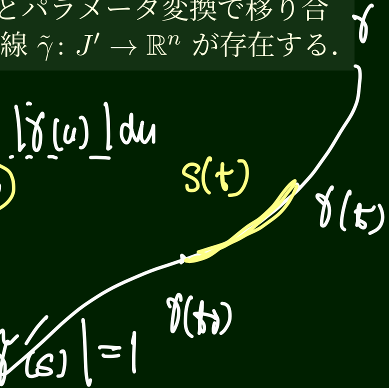
正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ に対して，これとパラメータ変換で移り合う弧長によりパラメータ表示された曲線 $\tilde{\gamma}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が存在する．

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(u)|\,du$$

$$\Updownarrow$$

$$t = t(s)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) \Rightarrow |\tilde{\gamma}'(s)| = 1$$



弧長パラメータ

命題

弧長パラメータは定数の差を除いて一意的である．

$\tilde{\gamma}(s)$　　$\hat{\gamma}(u)$: 弧長パラメータ表示

$\Rightarrow \{u(s)\}' = 1$

$\Rightarrow u = s + a$

命題 2.2