幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/14

問題 1-1

問題

区間 $J=[0,\pi]$ 上の C^∞-級関数 $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin nx$（$n=1,2,\dots$）と定数関数 $f_\infty(x)=0$ を考える.

1. 関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に一様収束することを示しなさい.
2. 曲線 $\gamma_n(x) := {}^t(x, f_n(x))$ の弧長は $\gamma_\infty(x) = {}^t(x,0)$ の弧長に収束しないことを示しなさい.

問題 1-2

問題

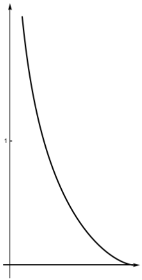
$\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，原点を通り $\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への正射影を $\pi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ と書く．零でない二つの定数 a, b に対して曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto {}^t(a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ の正射影 $\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) := \pi_{\boldsymbol{v}} \circ \gamma(t)$ が $t = 0$ に特異点をもつような $\boldsymbol{v}$ を求めなさい．

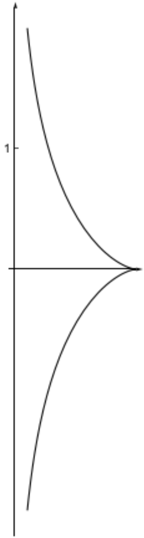
問題 1-3

問題

$J = (0,\infty)$ 上で定義された曲線 $\gamma(t) = {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ の弧長パラメータ表示を求めなさい.

追跡線 tractrix





特異点

定義 (定義 1.10)

曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ において $\dot\gamma(t_0) = \mathbf{0}$ が成り立つとき t_0 をパラメータ表示 γ の特異点という．特異点をもたないパラメータ表示を曲線の正則なパラメータ表示，略して正則曲線という．とくに $|\dot\gamma| = 1$ のとき弧長パラメータ表示という．

弧長パラメータ

曲線のパラメータ表示 $\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ が弧長パラメータ表示であるとは，$|\gamma'(s)| = 1$ が各 $s \in J$ に対して成り立つことである．このとき s を弧長パラメータという．

命題

正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ に対して，これとパラメータ変換で移り合う弧長によりパラメータ表示された曲線 $\tilde{\gamma}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が存在する．

弧長パラメータ

命題

弧長パラメータは定数の差を除いて一意的である.