幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/14

目標

$\mathbb{R}^2$ の曲線.

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

- 曲率が平面曲線を定める．
- たとえば $\boxed{\kappa(s) = s}$ は平面曲線の方程式を与えている．自然方程式

$x \mapsto Ax + a$

$A \in SO(2)$

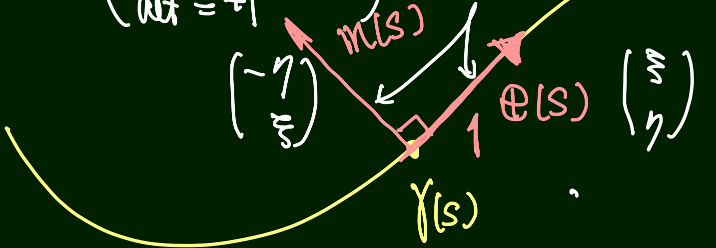
何が曲線を定めるか

フルネ枠

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$：平面曲線の弧長パラメータ表示.
- $\boldsymbol{e}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}(s)$：単位接ベクトル.
- $\boldsymbol{n}(s) := R\boldsymbol{e}(s)$；$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 90° 回転　左向き法線ベクトル
- $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$：フルネ枠. $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(2)$.

$\begin{pmatrix} 2\times 2 \text{ 直交行列} \\ \det = +1 \end{pmatrix}$

正規直交基



フルネの公式

命題 (フルネの公式；命題 2.3)

次をみたす C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する．$(e, n)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \boxed{\Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}}.$$

交代

$$\boxed{\frac{de}{ds} = \kappa n \qquad \frac{dn}{ds} = -\kappa e}$$

$e \cdot e = 1$　　$2\dfrac{de}{ds} \cdot e = 0$; $e' \perp e$

κ

$e' = \kappa n$

$n \cdot n = 1$　　$n' = ☆\, e$.

$-\kappa$

$0 = (e \cdot n)' = e' \cdot n + n' \cdot e$

曲率

定義

κ を γ の曲率関数, 曲率という.

curvature

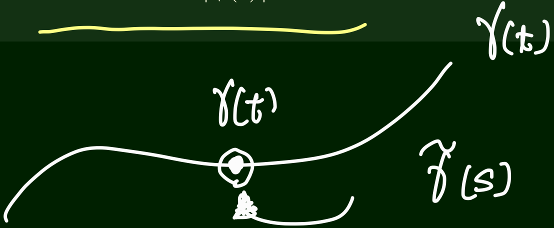
命題 2-5

平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して

$$\kappa(t) = \frac{\det\left(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\right)}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

とくに t: 弧長

$\kappa = \det(\gamma', \gamma'')$



定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

($\kappa = s$: 曲率をきめている clothoid.)

一意: $\gamma(s)$, $\tilde{\gamma}(s)$: 弧長パラメータ表示 曲率 $\kappa(s)$ 共通

$$\Rightarrow \tilde{\gamma} = A\gamma + a \quad (A \in SO(2))$$

$\tilde{\mathcal{F}}' = \tilde{\mathcal{F}}\Omega$

$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$

pf

$$\frac{d}{ds}\left(\tilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F}\right) = \tilde{\mathcal{F}}\left(\Omega + {}^t\Omega\right){}^t\mathcal{F} = 0$$

0

$\mathcal{F}$

$$\tilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F} = A \; : \text{一定} \quad \in SO(2)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = A\mathcal{F} \qquad ({}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1})$$

$$\tilde{e} = A e$$

$$\tilde{\gamma}' = A\gamma' \qquad \tilde{\gamma} = A\gamma + a$$

存在 证

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} {}^t\big(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\big)\,du$$

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du$$

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい．

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$.
2. $\kappa(s) = -1/\sqrt{16 - s^2}$，$s \in (-4, 4)$.

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 $L\ (>0)$ を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

$$\kappa(s+L) = \kappa(s)$$

本日の課題の提出締切は

2021 年 10 月 18 日（月曜日）07:00 JST