幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/14 (2021/10/21 訂正)

目標

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J\to\mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J\to\mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

- 曲率が平面曲線を定める．
- たとえば $\kappa(s)=s$ は平面曲線の方程式を与えている．

フルネ枠

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$：平面曲線の弧長パラメータ表示.
- $\boldsymbol{e}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}(s)$：単位接ベクトル.
- $\boldsymbol{n}(s) := R\boldsymbol{e}(s)$；$R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$：フルネ枠. $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(2)$.

フルネの公式

命題 (フルネの公式；命題 2.3)

次をみたす C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する.

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

曲率

定義

κ を γ の曲率関数，曲率という．

命題

平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して

$$\kappa(t) = \frac{\det\bigl(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\bigr)}{|\dot\gamma(t)|^3}.$$

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい.

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$.
2. $\kappa(s) = -1/\sqrt{16 - s^2}$，$s \in (-4, 4)$.

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 L (>0) を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．