

2021年10月14日 (2021年10月21日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 2

お知らせ

- 今回は47名の方から課題の提出がありました(10月11日07:00(JST)にダウンロード)。

前回の補足

- \mathbb{R}^n の等長変換に関する定理1.4の証明の概略(講義で紹介した)の中で、「 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, かつ任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $g(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ をみただけならば g は線形写像」の証明を複数名の方からいただきました。だいたい二通り:(1) \mathbb{R}^n の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ をとると, $\{g(\mathbf{e}_1), \dots, g(\mathbf{e}_n)\}$ も正規直交基底. そこで $(g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})) \cdot g(\mathbf{e}_j) = 0$ ($j = 1, \dots, n$) であることを示せば $g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$ が成り立つ. (2) $|g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})|^2 = 0$ などを示す.
- 命題1.11の証明で $s(t)$ が決まるには $|\dot{\gamma}(t)|$ の連続性が必要なので説明すべき, というご意見がありました. 上の定義1.10で(ここでは)正則曲線を C^∞ -級としていますので, $|\dot{\gamma}(t)|$ は自動的に連続になります.
- パラメータ変換 φ の微分が負になるものを考えないのはなぜか, というご質問が複数ありました. 文脈によりますが, この講義では進行方向が異なる曲線のパラメータ表示を区別するつもりなので.

前回までの訂正

- 「正規直交基底」は「正規直交基底」の誤りではないかという指摘がありました, どちらの用語も使われるようです.
- 成績評価の方法について, $Z = \min\{z, 100\}$ は不要という指摘がありました. 試験の満点は100点なので...
- 講義概要 syllabus.pdf, 1ページ, 下から10行目: 定期試験機関 \Rightarrow 定期試験期間
- 講義概要, 講義資料1, 2ページ16行目: 行わず \Rightarrow 行わず
- 講義資料1, 3ページ, 7行目: 曲線 $\gamma \Rightarrow$ 写像 γ
- 講義資料1, 3ページ, 7行目: $t_2 \Rightarrow t_1$
- 映写資料A, 2ページ, 5行目: 2020 \Rightarrow 2021
- 映写資料Aのページ番号がおかしかったようです.
- 映写資料Cの表紙・フッタに訂正の日付が入っていました.
- 映写資料Cのページ数がおかしかったようです. (Beamerの仕様かもしれません)
- 映写資料C, 6ページ, 3行目: $\tilde{J}_2 \Rightarrow J_2$
- 映写資料C, 15ページ: γ の表示式の右辺に転置をつける.

授業に関する御意見

- 定義(定理)を説明した後に簡単な問と答えがあると助かります. 山田のコメント: それが課題です.
- 講義資料の全ての課題の解説がとうれしいです. 山田のコメント: 講義のネタです.
- 数学における論証がとても苦手なので, 他の学生さんの模範的な答案を共有したり, 次回の講義で演習問題についての全体的な講評などを先生にさせていただいたりすると助かります. よろしくお願ひします. 山田のコメント: 他の学生の答案を見せるには本人の承諾が必要かと思しますので, ちょっと面倒. 解説はします. 講評とはどういうものなのか分かりません.
- 講義資料は授業前に印刷しておきたいので, 前日までにアップロードしていただけると幸いです. すみません. 紙に書き込みた者なので... 山田のコメント: なかなか間に合いません. このシートのみであれば前日に出せます. ハンドアウトはぎりぎりを作っているの, ちょっときついかも. 作業を1日前倒しにするには提出物の締切を1日前倒しにする必要があるかもです.
- 声で質問した場合, 上の欄に名前を書くべきでしょうか. 山田のコメント: 評価対象にするべきでしたら書いてください.
- 疑問が湧いても大抵自己解決してしまうため, 質問したいことが無くなってしまいます. 山田のコメント: そう? それなら湧いた疑問と自己解決までの道のりを書いていただいてもよいです.
- 少し速いと思いました. /もう少しゆっくり進めていただきたいです. / 授業の進みが早く(原文ママ)感じます. 山田のコメント: Sorry. チャットなどで質問やコメントが入ると少し減速します.
- 微分, 積分などの計算が多く, 速く解くのは大変な気がしました. 山田のコメント: まだそれほど多くないと思います.
- 課題とテストの得点の比率を変えられるのはおもしろいと思いました. 山田のコメント: でしょ. 自己責任で.
- 課題の点数は知られますか. 山田のコメント: はい. そうでないかと評価の方法が破綻します.
- この授業では x 微分を「 f' », t 微分を「 $\dot{\gamma}$ 」とするように「 $'$ 」と「 $\dot{}$ 」を使い分けているのですか? 山田のコメント: あまり厳密にやっていないが, たとえばこの資料の3ページ脚注(テキストと同じ使い方). 誤解が生じる恐れがある時は都度注意する.

- Lua \LaTeX のビルドが遅くて大変でした。次は手書きか別のファイルでコーディングしてからビルドするようにします。
山田のコメント：なるほど。一部 hack すれば \LaTeX でも通るはず。クラスファイルを `jsarticle`, ユニット `\zh, \zw` をそれぞれ `zh, zw` にする必要があるかと思います (動作確認していません)
- 認識と事実の違いについて授業で指適 (原文ママ：指摘のことか) があったので今日の授業を振り返ってみたところ, `zoom` がムンクさんを人だと認識し, ムンクさんがぼやけなかったという事実があったと思いました。
山田のコメント：ですね！ やっぱ「ムンクさん」なんです。個人的には「叫びちゃん」と呼びたいです。
- “みはじ” という言葉を大学で聞くとは思わず少し笑いました。 山田のコメント：でもそれがぴったりでしょ。
- `~u` 山田のコメント： :-P
- 「講義」の「義」は今まで間違えて書いていたので、これからは正しく書きたいと思います。 山田のコメント：よろしく。
- とても分かりやすかったです。ありがとうございました。また、スライドの色を黒板色にして頂けたことが非常にありがたかったです。3, 4Q の間、よろしくお祈りします。 山田のコメント：こちらこそ。
- とても良い授業だと思いました。 山田のコメント：Thanks.

質問と回答

質問 1: Euclid 空間の元として “ v ” のように書くものと “ P ” のように書くものが混在している。これはアフィン空間と基準ベクトル空間として同じ \mathbb{R}^n をとって後者にのみ内積を与えた計量アフィン空間を暗に想定しているのか？

お答え： はい。

質問 2: 2 次直交行列は回転と折返し行列がそれぞれ θ という一つのパラメータで表すことができたのだが、3 次以降の直交行列は何個のパラメータ (原文ママ) によって表すことができるのか疑問に思った。 n 次では n^2 個の要素に対して $n^2 + n$ 個の連立する方程式ができるので多くても $n - 1$ 個であることがわかる。

お答え： $n^2 + n$ 個では未知数に比べて方程式の方が多いので解があることが自明ではありませんね。なぜ $n - 1$ という数字がでてきたのでしょうか。 n 次直交行列 A に対して ${}^tAA = I$ は n^2 個の関係式ですが、左辺も右辺も対称行列なので実は $\frac{n^2+n}{2}$ 個の関係式。したがって (すこし議論が必要だが) $\frac{n(n-1)}{2}$ 個のパラメータで (局所的には) 表示できる。業界用語では「 $SO(n)$ は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元リー群」。

質問 3: 整数行列の直交行列は次元ごとに何個あるのか疑問に思った。 n 次元では $n * ((n-1)$ 次元での個数) と予想したが証明できていない。

お答え： $n = 2$ では 8, 3 では 48。

質問 4: $SO(n)$ を n 次直交行列で行列式が 1 であるもの全体としていますが、行列式が -1 の場合を考えないのは何故でしょうか。

お答え： 考えていないのでしょうか。行列式が -1 のもの全体の集合にとくに名前をつけないのは、それが行列の積に関して群をなしていないから。

質問 5: 等長変換は $f: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($A \in O(n), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$) と表されますが、行列 A が回転移動、点対称移動でベクトル \mathbf{a} が平行移動を意味していると考えて良いですか。

お答え： よくありません。2 次元の場合、回転と「折返し」です。折返しは点対称ではありません。偶数次元では原点に関する対称移動は $SO(n)$ の元で表されます。

質問 6: 等長変換が上述の写像 f のみであると講義内でおっしゃっていましたが、どのように証明しますか (背理法と聞いていますが上手くいきませんでした)。

お答え： 背理法ではないと思います。講義で証明の概略を説明しましたが、それをどこまでフォローしてどこで躓いたか教えて欲しいです。

質問 7: 等長変換について、それを表す行列 $A \in O(n)$ が特に $A \in SO(n)$ ならば保たれ、 $A \notin SO(n)$ なら反転するという「向き」は数学的に定義づけられるモノなのでしょうか。運動学における剛体運動を \mathbb{R}^3 の等長変換と見なしたとき、向きの反転するような運動はありえない、というような要領で「向きが保たれるか反転するか」自体の物理的イメージはつきませんが...

お答え： 向きの定義は (同値な定義がいくつか; 座標の同値類, 基底の同値類, 零点をもたない n 次微分形式など) あるが、面倒なのでここでは扱わない。ここでは「向きを保つ」「向きを反転する」というひとまとまりの語を定義した。

質問 8: 講義では、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が距離を保つときの等長変換 (山田注: 文が変) f は $f: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ ($A \in O(n), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$) で紹介されましたが、 $A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ 以外にも等長変換となるものはありますか？

お答え： 定理 1.4.

質問 9: 等長変換が全単射であることは、等長変換全体が合成に関して群になることから従う、としても大丈夫ですか。

お答え: いいえ, 定理 1.4 によります. $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ の逆写像は $f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.

質問 10: ちょうど今代数学の講義で群について学んでいるのですが, 等長変換全体の集合は写像の合成に関して群をなすので, 写像 f (等長変換) が全単射であるという条件が必要だとおもいました. それは等長変換の定義には必要ないのですか.

お答え: 一般の距離空間の場合, 全単射を仮定する必要があります. ユークリッド空間の場合, 距離を保つという仮定だけから全単射性が得られます.

質問 11: ユークリッド空間では合同変換が直交行列を使って表されましたが, 一般の距離空間でもなにか特殊な行列の群を使って表すことはできますか?

お答え: いいえ. たとえば離散距離空間を考えてごらんください.

質問 12: 講義中のスライドについてですが, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}\{|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2\}$ と書いていますが, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}\{|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2\}$ のほうがわかりやすいかなと思いました. そう書かなかった理由等がもし有れば教えてください.

お答え: 余弦定理の形に合わせた.

質問 13: パラメータ変換の例であげられていた $\gamma_1(s) = (\cos s, \sin s)$ から $\gamma_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ への変換で, J_1 を $[-\pi, \pi]$ とすると $\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$ となる t が存在しないため, 同様の変換が存在しません. しかし $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2}$ で極限を含めると同様の取扱いができそうにみえます. こういった極限を含めた曲線のふるまいも考えられるのでしょうか.

お答え: 开区間でパラメータ表示されている場合, 区間の端で (1) 極限が存在する (2) 無限遠に「飛び去る」(3) 有界にとどまるが極限が存在しない. とさまざまな場合があり, 統一的に取り扱うことはできませんが, (1) のケースは工夫すれば連続なパラメータ表示をつくることができます.

質問 14: パラメータ変換の 2 つ目の例について, γ_1 と γ_3 が移り合わないのは φ が $\mathbb{R}_{<0}$ に存在しないからですか?

お答え: $\gamma_1(s) = (s, 0)$, $\gamma_3(u) = (u^3, 0)$ のことですね. お答えは「いいえ」. $\gamma_3(u) = \gamma_1 \circ \varphi(u)$ ($\varphi(u) = u^3$) ですが $\varphi(0) = 0$ です.

質問 15: 「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係であるとは, 曲線のパラメータ表示 γ_1, γ_2 について γ_1 は γ_2 のパラメータ変換である $\Leftrightarrow \gamma_2$ は γ_1 のパラメータ変換である, ということでしょうか.

お答え: いいえ, 「同値関係」という数学用語の定義を思い出してください.

質問 16: パラメータ変換で移り合うことが同値関係であるためには, 講義でふれた対称律のみならず反射律, 推移律も必要だが, 反射律は $\varphi = 1$ から成立, 推移律は $\frac{d}{dx}(f \circ g) = g'(x)f'(g(x)) > 0$ ($\because g'(x) > 0, f'(x) > 0$) から成立ということでしょうか.

お答え: はい.

質問 17: パラメータ変換に関する補題 (映写資料 C, 9 ページ) ですが, 1. $\varphi > 0$ より φ は区間で狭義単調増加. よって単射なので φ^{-1} が取れ, $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$ とできる. 2. $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ より (γ_1 による像) \subset (γ_2 による像) が成立. 1 より $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$ なので (γ_2 による像) \subset (γ_1 による像) と示せるでしょうか.

お答え: 1 は「同値関係となる」ことを示しきれていない. 2 は OK.

質問 18: $\sqrt{2} = 1$ の証明? という例がありましたが, 等号ではなく同値類のような方法で, 一樣収束 (別の収束でも可) する列の弧長の極限と収束先の弧長が同じグループに属するとみなす数学的手法はありますか?

お答え: どういうものを想像しているのか, 分かりません. 弧長は「値」ですから実数に同値関係を入れるということでしょうか?

質問 19: 定義 1.7 より, パラメータ γ が C^1 -級するとき (原文ママ) $\mathcal{L}(\gamma) =$ (略) と弧長を定義していました. この定義では $\dot{\gamma}$ のときに γ が C^1 -級 (山田注: 文が変?) である必要があることは分かります. ここで「注意 1.8」の (略) の定義だと γ が C^1 -級という条件はいらぬのではないのでしょうか. もし注意 1.8 の $\mathcal{L}(\gamma)$ の求め方に C^1 -級が必要なければ C^1 -級でない弧長 (ex. $y = |x|$, $x \in [-1, 1]$) のようなものにも弧長が定義できてその方が一般化できているのではないのでしょうか.

お答え: はい, そのとおり. ただ注意 1.8 から定義 1.7 の公式を導くのはそれなりに面倒なのでここでは定義としました. なお, 例として挙げられた曲線は区分的 C^1 -級なので, 定義 1.7 のタイプで弧長が定義できますね.

質問 20: パラメータ表示された 2 曲線 $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ で移り合うとき (中略) となることから, パラメータ変換で移りあう曲線の弧長は等しいといういことよろしいでしょうか.

お答え: はい.

質問 21: 弧長パラメータ表示がよくわからない. 値なのか式なのかを教えてください. もしくは何か例題と解答例がほ

しい.

お答え: はい.

質問 22: 今度正則なパラメータ表示を考えるとときは弧長 (原文ママ: 弧長のことか) パラメータ表示を使うことになると思うのですが, 弧長パラメータ表示を用いる利点は何でしょうか? ($|\dot{\gamma}| = 1$ が常に成り立つから計算が楽になりそうだと思います).

お答え: そうですね. 加えて「標準的なパラメータがある」ということは便利です.

質問 23: 命題 1.11 にて正則曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ とパラメータ変換で移り合う弧長パラメータ表示された曲線 $\gamma \circ \varphi$ は $(s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(u)| du$ の端 t_0 のとり方を除いて) 一意的に定まるでしょうか. もしそうだとすると命題の方法では得られない弧長パラメータ表示が存在するでしょうか?

質問 24: 正則曲線 $\gamma(t)$ の式が与えられると, その弧長パラメータで記述する式が一意に決まりますか.

お答え: 弧長パラメータは変換 $s \mapsto s + a$ (a は定数) を除いて一意. 本日の講義.

質問 25: 問題 1-3 の計算過程 $d\tilde{t}/dt = \tanh t$ が分かった後 (中略) その過程はまわりくどいと思いますが, 何かいっばつで $t(\tilde{t})$ を算出する方法はありますか.

お答え: たぶんない.

質問 26: パラメータ付けられた曲線は, パラメータ変換で無数にパラメータ表示できると思います. その中で正則曲線は弧長 (原文ママ: 弧長?) パラメータ表示でうまく代表を取っていると思います. 正則曲線でない曲線に対して, 代表をとる時, どのような性質をもっているといいですか?

お答え: 特別な特異点の場合には試みがありますが, 一般にはそういうものはとれないと思います.

質問 27: C^∞ -級について, 「すべての r に対して r 回微分可能」とだけ言えば $(r+1)$ 回微分も可能であり, r 回導関数の連続性も保証されていると思うのですが, C^∞ 級のときでも導関数の連続性は必要ですか.

お答え: おっしゃるとおり不要です.

質問 28: 特異点であるということが曲線上で何を意味しているのかという質問をします.

お答え: はい, 承りました.

質問 29: 正則曲線の「正則」というワードは複素解析における正則関数の概念と何か関係がありますか. (正則曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対し複素関数 $f(t) = x(t) + iy(t)$ を考えたとき, $f(t)$ は複素解析の意味で正則ですか.)

お答え: Regular の訳語. 特に関係はない. 括弧内について: t が実変数なので複素関数としての正則性とは関係がないですね.

質問 30: この授業で扱う“図形”というものはすなわち, \mathbb{R}^n の部分集合 A, B における同値関係 $A \simeq B$ を「 $A \simeq B \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$ 上にある等長変換 f, g が存在して $f(A) = f(B)$ 」と定めたときの, \mathbb{R}^n のべき集合 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の \simeq による同値類 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)/\simeq$ の元が“図形”であるという認識でよろしいでしょうか.

お答え: 認識するのは自由ですので, よい, 悪いは判別できません. この講義では「図形」をきちんと定義しません.

質問 31: 授業中では, 曲線を定義しませんでした, 曲線を定義するならば先生はどのようなものを定義と考えていますか.

お答え: 文脈によって変えます.

質問 32: 授業では \mathbb{R}^n 上での話だけでしたが, \mathbb{R}^n 以外の空間についての微分幾何学の研究はおこなわれているのでしょうか?

お答え: 通常は多様体上でやります.

質問 33: 受講者が定める定数の定義域を $[0, 1]$ にこだわる理由は何ですか. $p \in [0.3, 1]$ を定めさせる方が単純だと思いました.

お答え: $[0, 1]$ としておけば, 外れ値を書く人はまずいないと思いますが, $[0.3, 1]$ では 0.2 や 0 にする人が必ずでてきて処理に困るので.

2 平面曲線の基本定理

2.1 弧長パラメータ (復習)

曲線のパラメータ表示^{*1} $\gamma: J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ が弧長パラメータ表示であるとは、 $|\gamma'(s)| = 1$ が各 $s \in J$ に対して成り立つことである。このとき s を弧長パラメータという^{*2}。

命題 2.1. 正則曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、これとパラメータ変換で移り合う弧長によりパラメータ表示された曲線 $\tilde{\gamma}: J' \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する。

証明: 固定点 $t_0 \in J$ に対して $s(t) := \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(u)| du$ とおけばよい。実際、 $t \mapsto s(t)$ は $ds/dt > 0$ を満たすので、なめらかな逆関数 $t \mapsto t(s)$ が存在する。そこで $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$ とおけば、

$$\left| \frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{dt(s)}{ds} \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \right| = \left| \frac{1}{ds/dt(t(s))} \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \right| = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t(s))|} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \right| = 1.$$

命題 2.2. 弧長パラメータは定数の差を除いて一意である。

証明: パラメータ変換で移り合う曲線 $\gamma(t), \tilde{\gamma}(s)$ がともに弧長パラメータ表示とする。パラメータ変換を $t \mapsto t(s)$ とかくと $dt/ds > 0$ なので $\left| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s) \right| = \frac{dt(s)}{ds} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \right|$ だから $dt/ds = 1$ 。したがって $t(s) = s + a$ (a は定数)。

2.2 平面曲線

ここでは $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ を区間 J 上で定義された、座標平面 \mathbb{R}^2 の曲線の弧長パラメータ表示とする。

$$\mathbf{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s), \quad \mathbf{n}(s) := R\mathbf{e}(s) \quad \left(R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

により $\mathbf{e}, \mathbf{n}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ を定義すると、各 s に対して $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)\}$ は \mathbb{R}^2 の正規直交基底を与える。とくに $\mathcal{F}(s) := (\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s))$ とおくと $\det \mathcal{F}(s) = 1$ となるので $\mathcal{F}: J \rightarrow \text{SO}(2)$ となる。この \mathcal{F} を γ のフルネ枠、 \mathbf{e}, \mathbf{n} をそれぞれ単位接ベクトル (または単位速度ベクトル)、左向き単位法線ベクトルという。

命題 2.3 (フルネの公式). 次をみたま C^∞ -級関数 $\kappa: J \rightarrow \mathbb{R}$ がただ一つ存在する。

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \quad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

証明: 各 s に対して $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)\}$ は \mathbb{R}^2 の正規直交基底なので、任意の \mathbb{R}^2 の要素はこれらの線形結合。そこで

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds}(s) = a_{11}(s)\mathbf{e}(s) + a_{21}(s)\mathbf{n}(s), \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = a_{12}(s)\mathbf{e}(s) + a_{22}(s)\mathbf{n}(s)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} a_{11}(s) &= (a_{11}(s)\mathbf{e}(s) + a_{21}(s)\mathbf{n}(s)) \cdot \mathbf{e}(s) = \frac{d\mathbf{e}}{ds}(s) \cdot \mathbf{e}(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s)) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} 1 = 0 \\ a_{22}(s) &= (a_{12}(s)\mathbf{e}(s) + a_{22}(s)\mathbf{n}(s)) \cdot \mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} 1 = 0 \\ a_{21}(s) &= \frac{d\mathbf{e}}{ds}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \frac{d}{ds} (\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) - \mathbf{e}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\mathbf{e}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -a_{12}(s). \end{aligned}$$

したがって $a_{21}(s) = \kappa(s)$ とおくと $\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{e}(s)$ 。

2021年10月14日 (2021年10月21日訂正)

*1 とくに断りのない限り、曲線のパラメータ表示、パラメータ変換は C^∞ -級としておく。

*2 テキストに従って、弧長パラメータを表すときは文字 s を用いる。また、弧長パラメータに関する微分を $' = d/ds$ で表す。

定義 2.4. 命題 2.3 の κ を平面曲線 γ の曲率または曲率関数という。また、弧長とは限らない平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して、 $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$ をその弧長パラメータ表示、 $\tilde{\kappa}(s)$ を $\tilde{\gamma}$ の曲率関数とすると、 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t) := \tilde{\kappa}(s(t))$ で定義する。ただし $s(t)$ は $t(s)$ の逆関数である。

命題 2.5. 平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して $\kappa(t) = \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) / |\dot{\gamma}(t)|^3$ で与えられる。

証明： 弧長関数 $s = s(t)$ の逆関数 $t = t(s)$ を用いて $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ と弧長パラメータ表示をすると、 $dt/ds = 1/|\dot{\gamma}|$ から

$$\tilde{e}(s) := \frac{d}{ds} \tilde{\gamma}(s) = \frac{dt}{ds} \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t(s))|} \dot{\gamma}(t(s))$$

は $\tilde{\gamma}$ の単位接ベクトル。 $\tilde{\gamma}$ のフルネ枠を $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{e}, \tilde{n})$ とおけば、

$$\tilde{\kappa}(s) \tilde{n}(s) = \frac{d\tilde{e}}{ds}(s) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma} \right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|} \right) \dot{\gamma} + \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \ddot{\gamma} \right).$$

したがって $\det \tilde{\mathcal{F}} = 1$ であること注意すれば、 $\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$ より $\tilde{\kappa} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|^3} \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$.

2.3 平面曲線の基本定理

補題 2.6. 正則な平面曲線 γ の曲率関数は変換 $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} := A\gamma + \mathbf{a}$ ($A \in \text{SO}(2)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$) で不変である。

証明： $\dot{\tilde{\gamma}} = A\dot{\gamma}$, $\ddot{\tilde{\gamma}} = A\ddot{\gamma}$ なので A が直交行列であることから $|\dot{\tilde{\gamma}}| = |\dot{\gamma}|$, さらに $\det(\dot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}}) = \det(A(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})) = \det A \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ なので命題 2.5 から結論が得られる。

定理 2.7 (平面曲線の基本定理). 区間 J 上で定義された C^∞ -級関数 $\kappa: J \rightarrow \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータ付けられた C^∞ -級平面曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ で、その曲率関数が κ となるものが存在する。さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である。

証明：一意性： 弧長で表された二つの曲線 $\gamma(s)$, $\tilde{\gamma}(s)$ の曲率関数がともに $\kappa(s)$ とする。 γ , $\tilde{\gamma}$ のフルネ枠をそれぞれ \mathcal{F} , $\tilde{\mathcal{F}}$ とおくと、フルネの公式 (命題 2.3) から、 $\frac{d}{ds} \tilde{\mathcal{F}}^t \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}^t \mathcal{F}' + \tilde{\mathcal{F}}^t \mathcal{F}'' = \tilde{\mathcal{F}}^t (\Omega + {}^t \Omega) \mathcal{F} = O$. したがって $A := \tilde{\mathcal{F}}^t \mathcal{F} \in \text{SO}(2)$ は s によらない定行列。 $\mathcal{F}^{-1} = {}^t \mathcal{F}$ に注意すれば $A\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$. とくに \mathcal{F} の第一列は γ' , $\tilde{\mathcal{F}}$ の第一列は $\tilde{\gamma}'$ なので $\tilde{\gamma}' = A\gamma' = (A\gamma)'$. したがって $\tilde{\gamma} = A\gamma + \mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$).

存在： $s_0 \in J$ を一つ固定して、次のようにおけばこれが求めるものである：

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^s {}^t (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du, \quad \theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(u) du.$$

問題

2-1 区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき、 $\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい。

(1) $\kappa(s) = a$ (定数), $J = \mathbb{R}$. (2) $\kappa(s) = -1/\sqrt{16-s^2}$, $s \in (-4, 4)$.

2-2 \mathbb{R} 上で定義された、弧長 s をパラメータとする C^∞ -級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 $L (> 0)$ を持つとする。このとき、ある $A \in \text{SO}(2)$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ で、任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \mathbf{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい。