幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/21

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい.

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$.
2. $\kappa(s) = -\dfrac{1}{\sqrt{16 - s^2}}$，$s \in (-4, 4)$.

フルネの公式

命題 (フルネの公式；命題 2.3)

弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の単位接ベクトル，左向き単位法ベクトル，曲率をそれぞれ $\boldsymbol{e} = \gamma'$，$\boldsymbol{n}$，κ と書くと

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{e}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega; \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$ はフルネ枠.

$\in$

$SO(2)$ $\left\{\begin{array}{l} \text{直交行列} \\ \det = 1 \end{array}\right.$

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

存在の証明：

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du, \qquad \theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\, du$$

とおけばよい．

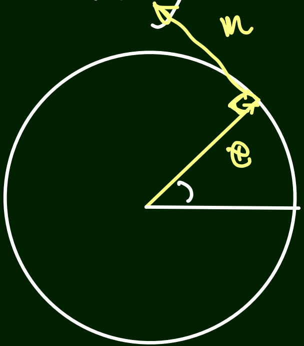
Q: この式はどうやって見つけたか．

$$e' = \theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \theta' n \quad ''\kappa$$

$$\gamma' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} =: e \qquad n = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e} = \gamma'$: 単位ベクトル

$$\mathbf{e}(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{e}'(s) = \theta' \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}} = \theta' \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n}$$

$$\boxed{\theta' = \kappa}$$

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい．

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$.

$\boxed{s_0 = 0}$

<u>$a \neq 0$ のとき</u>：

半径 $\frac{1}{a}$ の円

$$\theta(s) = \int_0^s a\,du = as, \qquad \gamma(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos \overset{\theta}{au} \\ \sin \underset{\theta}{au} \end{pmatrix} du = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\sin as \\ \cos as \end{pmatrix}$$

-1

<u>$a \neq 0$ のとき</u>：

$=$

$$\theta(s) = \int_0^s 0\,du = 0, \qquad \gamma(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

直線

曲率一定の平面曲線

命題

- 曲率 κ が正の定数であるような平面曲線は半径 $1/\kappa$ の円（の一部）を反時計回りにパラメータ表示したものである.
- 曲率 κ が負の定数であるような平面曲線は半径 $-1/\kappa$ の円（の一部）を時計回りにパラメータ表示したものである.
- 曲率が恒等的に 0 であるような平面曲線は直線（の一部）である.

問題 2-1

問題

$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい.

2. $\kappa(s) = -\dfrac{1}{\sqrt{16-s^2}}, \quad s \in (-4, 4).$

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\,du = \int_0^s \frac{-du}{\sqrt{16-u^2}} = -\sin^{-1}\frac{s}{4}$$

$$\cos\theta(s) = \cos\left(-\sin^{-1}\frac{s}{4}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{s}{4}\right)^2}$$

$$\sin\theta(s) = -\frac{s}{4}.$$

問題

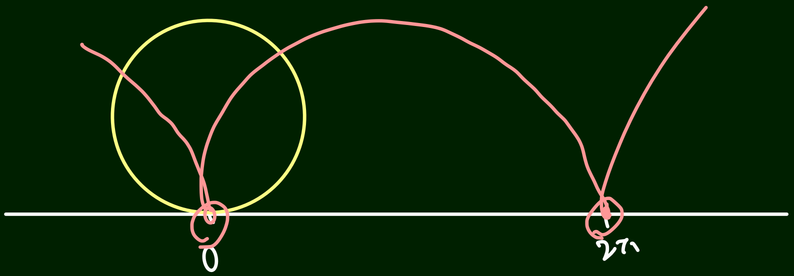
2. $\kappa(s) = -\dfrac{1}{\sqrt{16-s^2}}, \quad s \in (-4,4).$

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\underset{-\frac{u}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{4}\right)^2}} \right) du = \left(\underset{\frac{-s^2}{8}}{\frac{1}{2}s\sqrt{1-\left(\frac{s}{4}\right)^2}} + 2\sin^{-1}\frac{s}{4} \right). \text{ on } \mathbb{R}$$

パラメータ変換 $\boxed{\dfrac{s}{4} = -\cos\dfrac{t}{2}}$:

cycloid $\begin{cases} x = t - \sin t. \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

$0 < t < 2\pi$


0
2π

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 L (>0) を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

一意性の言い換え：
曲線 $\gamma(s)$，$\tilde{\gamma}(s)$ がともに弧長によりパラメータづけられていて，曲率関数が共通ならば，

$$\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a} \qquad A \in \mathrm{SO}(2), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$$

とかける．

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 $L\ (>0)$ を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s+L)$ とおくと，$\tilde{\gamma}$ と γ は同じ曲率関数をもつ．

$\kappa(s)$

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s+L)$$
$$= \kappa(s)$$

問題 2-2；具体的表示

κ：周期 L をもつ.

$$\gamma_0(s) := \int_0^s \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du, \qquad \theta(s) := \int_0^s \kappa(u)\, du$$

とおく.

$$\begin{aligned} \theta(s+L) &= \int_0^{s+L} \kappa(u)\, du = \int_0^L \kappa(u)\, du + \int_L^{L+s} \kappa(u)\, du \\ &= \int_0^L \kappa(u)\, du + \int_0^s \underline{\kappa(v+L)}\, dv \\ &= a + \int_0^s \underline{\kappa(v)}\, dv = \theta(s) + a \qquad \left(a := \int_0^L \kappa(u)\, du\right). \end{aligned}$$

$u = v + L$

問題 2-2；具体的表示 2

$\boxed{\kappa' = 0}$

$$\theta(s+L) = \theta(s) + a$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(s+L) \\ \sin\theta(s+L) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix} \quad \left(\underline{A := \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}} \in \mathrm{SO}(2) \right)$$

$$\gamma(s+L) = \int_0^{s+L} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du$$

$$= \int_0^{L} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du + \int_L^{L+s} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du$$

$$= \boldsymbol{a} + \int_0^{s} \begin{pmatrix} \cos\theta(v+L) \\ \sin\theta(v+L) \end{pmatrix} dv \quad \left(\boldsymbol{a} := \int_0^{L} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du \right)$$

$$= \boldsymbol{a} + A \int_0^{s} \begin{pmatrix} \cos\theta(v) \\ \sin\theta(v) \end{pmatrix} dv = \boldsymbol{a} + A\gamma(s).$$

$\boxed{\gamma' = ⊕}$

常微分方程式の基本定理

J: 区間；U : $\mathbb{R}^n$ の領域

$\boldsymbol{f}\colon J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$: C^∞.

常微分方程式（の初期値問題）：

$\frac{d}{dt}y(t) =$ (tと yの式)

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y}(t)),\qquad \boxed{\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{a}}\qquad(\boldsymbol{a}\in U)\qquad\qquad(\heartsuit)$$

初期条件

線形常微分方程式：$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{y}$ について 1 次式.

定理 (常微分方程式の基本定理)

以上の状況で $\boldsymbol{f}\colon J\times U\to\mathbb{R}^n$ が C^∞-級ならば, t_0 を含む十分小さい区間 $J'\subset J$ 上で定義された初期値問題 $(\heartsuit)$ の C^∞-級の解がただ一つ存在する.

ちょっと とける

特に $(\heartsuit)$ が線形常微分方程式なら解は J 全体で定義された C^∞-級関数である.

$\boxed{\text{ずっと とける}}$

常微分方程式の例

例

$n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t, y) = \alpha y$ (α は定数)，$t_0 = 0$ とする：

1次式　　　線形

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y, \qquad y(0) = a$$

$y(t) = a e^{\alpha t}$ とおくとこれは条件をみたす

だから これが解　$\boxed{\text{一意性}}$

常微分方程式の例

例

$n=2$, $J=\mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}={}^t(x,y)$, $\boldsymbol{f}(t;x,y)={}^t(y,-k^2x)$（$k>0$ は定数）, $t_0=0$, $\boldsymbol{a}={}^t(a,b)$ とする：

線形

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-k^2x \qquad x(0)=a, \qquad y(0)=b$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x$$: 単振動.

$$x(t)=a\cos kt+\frac{b}{k}\sin kt$$

常微分方程式の例

例

$n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t, y) = y(1 - y)$, $t_0 = 0$ とする：

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y), \qquad \underline{y(0) = a.}$$

非線形.

$a > 1$　$a < 0$　：解は $\mathbb{R}$ 全体で
def されない.

(logistic equation)

平面曲線の基本定理の別証明

線形常微分方程式

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega$$

を解く．