幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/21

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい.

1. $\kappa(s) = a$ （定数），$J = \mathbb{R}$.
2. $\kappa(s) = -\dfrac{1}{\sqrt{16 - s^2}}$，$s \in (-4, 4)$.

フルネの公式

命題 (フルネの公式；命題 2.3)

弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の単位接ベクトル，左向き単位法ベクトル，曲率をそれぞれ $\boldsymbol{e} = \gamma'$，$\boldsymbol{n}$，κ と書くと

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{e}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega; \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$ はフルネ枠.

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

存在の証明：

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du, \qquad \theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\, du$$

とおけばよい．

Q: この式はどうやって見つけたか．

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい.

1. $\kappa(s) = a$ （定数），$J = \mathbb{R}$.

$\underline{a \neq 0\ のとき}$：

$$\theta(s) = \int_0^s a\,du = as, \qquad \gamma(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos au \\ \sin au \end{pmatrix} du = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -\sin as \\ \cos as \end{pmatrix}$$

$\underline{a \neq 0\ のとき}$：

$$\theta(s) = \int_0^s 0\,du = 0, \qquad \gamma(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

曲率一定の平面曲線

命題

- 曲率 κ が正の定数であるような平面曲線は半径 $1/\kappa$ の円（の一部）を反時計回りにパラメータ表示したものである.
- 曲率 κ が負の定数であるような平面曲線は半径 $-1/\kappa$ の円（の一部）を時計回りにパラメータ表示したものである.
- 曲率が恒等的に 0 であるような平面曲線は直線（の一部）である.

問題 2-1

問題

$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の具体的表示を求めなさい.

2. $\kappa(s) = -\dfrac{1}{\sqrt{16-s^2}}, \quad s \in (-4, 4).$

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\,du = \int_0^s \frac{-du}{\sqrt{16-u^2}} = -\sin^{-1}\frac{s}{4}$$

$$\cos\theta(s) = \cos\left(-\sin^{-1}\frac{s}{4}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{s}{4}\right)^2}$$

$$\sin\theta(s) = -\frac{s}{4}.$$

問題 2-1

問題

2. $\kappa(s) = -\dfrac{1}{\sqrt{16-s^2}}, \quad s \in (-4,4).$

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\underset{-\frac{u}{4}}{\sqrt{1-\left(\tfrac{u}{4}\right)^2}} \right) du = \left(\tfrac{1}{2} s \underset{\frac{-s^2}{8}}{\sqrt{1-\left(\tfrac{s}{4}\right)^2}} + 2\sin^{-1}\tfrac{s}{4} \right).$$

パラメータ変換 $\dfrac{s}{4} = -\cos\frac{t}{2}$ ：

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 L (> 0) を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

一意性の言い換え：
曲線 $\gamma(s)$，$\tilde{\gamma}(s)$ がともに弧長によりパラメータづけられていて，曲率関数が共通ならば，

$$\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a} \qquad A \in \mathrm{SO}(2), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$$

とかける．

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 $L\ (>0)$ を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s+L)$ とおくと，$\tilde{\gamma}$ と γ は同じ曲率関数をもつ．

問題 2-2；具体的表示

κ：周期 L をもつ.

$$\gamma_0(s) := \int_0^s \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du, \qquad \theta(s) := \int_0^s \kappa(u)\,du$$

とおく.

$$\begin{aligned} \theta(s+L) &= \int_0^{s+L} \kappa(u)\,du = \int_0^L \kappa(u)\,du + \int_L^{L+s} \kappa(u)\,du \\ &= \int_0^L \kappa(u)\,du + \int_0^s \kappa(v+L)\,dv \\ &= a + \int_0^s \kappa(v)\,dv = \theta(s) + a \qquad \left(a := \int_0^L \kappa(u)\,du\right). \end{aligned}$$

問題 2-2；具体的表示 2

$$\theta(s+L) = \theta(s) + a$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(s+L) \\ \sin\theta(s+L) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix} \quad \left(A := \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2) \right)$$

$$\gamma(s+L) = \int_0^{s+L} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du$$

$$= \int_0^{L} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du + \int_L^{L+s} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du$$

$$= \boldsymbol{a} + \int_0^{s} \begin{pmatrix} \cos\theta(v+L) \\ \sin\theta(v+L) \end{pmatrix} dv \quad \left(\boldsymbol{a} := \int_0^{L} \begin{pmatrix} \cos\theta(u) \\ \sin\theta(u) \end{pmatrix} du \right)$$

$$= \boldsymbol{a} + A \int_0^{s} \begin{pmatrix} \cos\theta(v) \\ \sin\theta(v) \end{pmatrix} dv = \boldsymbol{a} + A\gamma(s).$$

常微分方程式の基本定理

J: 区間；U：$\mathbb{R}^n$ の領域
$\boldsymbol{f}\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: C^∞.
常微分方程式（の初期値問題）：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t; \boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \in U) \qquad\qquad (\heartsuit)$$

線形常微分方程式：$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{y}$ について 1 次式.

定理 (常微分方程式の基本定理)

以上の状況で $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ が C^∞-級ならば，t_0 を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ 上で定義された初期値問題 ($\heartsuit$) の C^∞-級の解がただ一つ存在する.
特に ($\heartsuit$) が<u>線形常微分方程式</u>なら解は<u>J 全体で定義された</u> C^∞-級関数である.

常微分方程式の例

例

$n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t, y) = \alpha y$ (α は定数), $t_0 = 0$ とする：

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y, \qquad y(0) = a$$

常微分方程式の例

例

$n=2$, $J=\mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}={}^t(x,y)$, $\boldsymbol{f}(t;x,y)={}^t(y,-k^2x)$（$k>0$ は定数），$t_0=0$，$\boldsymbol{a}={}^t(a,b)$ とする：

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=-k^2x, \qquad x(0)=a, \qquad y(0)=b$$

常微分方程式の例

例

$n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t, y) = y(1-y)$, $t_0 = 0$ とする：

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y), \qquad y(0) = a.$$

平面曲線の基本定理の別証明

線形常微分方程式

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega$$

を解く.