幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/21

平面曲線の基本定理の別証明

κ　k

定理 (平面曲線の基本定理（存在パート）)

given

C^∞-級関数 $\kappa : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\boxed{\gamma}: J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率が κ となるものが存在．

- 点 $s_0 \in J$ を固定して，線形常微分方程式の初期値問題

単位行列

1次式

$$\underbrace{\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega,}_{\text{(4つの成分)}} \qquad \boxed{\mathcal{F}(s_0) = I} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$

初期条件　　J上

　の解 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ をとる．
- 各 $s \in J$ に対して $\mathcal{F}_0(s) \in \boxed{\mathrm{SO}(2)}$．とくに $\mathcal{F}_0$ の列ベクトルは正の正規直交系を成す．

e　n

- $\mathcal{F}_0(s) = \bigl(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\bigr)$ と分解して，次が求める曲線：

$$\gamma_0(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$$

ただし γ が given : $\mathcal{F} = (e, n)$ Frenet 枠 は

$$\underbrace{\mathcal{F}'}_{\text{unknown}} = \mathcal{F}\underbrace{\Omega}_{\text{given}} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$ を満たす

$$\frac{d}{ds}\big(\underbrace{\mathcal{F}_0\,{}^t\mathcal{F}_0}_{\text{const}}\big) = \mathcal{F}_0\Omega\,{}^t\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_0\,{}^t(\mathcal{F}_0\Omega) \qquad \frac{d}{ds}\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0\Omega$$

${}^t\Omega\,{}^t\mathcal{F}_0$

$$= \mathcal{F}_0\big(\underbrace{\Omega + {}^t\Omega}_{O}\big)\,{}^t\mathcal{F}_0 = O$$

$$\mathcal{F}_0(s)\,{}^t\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}_0(s_0)\,{}^t\mathcal{F}_0(s_0) = I\,{}^tI = I$$

∴ $\mathcal{F}_0$: 直交行列. ☆ $\det \mathcal{F}_0 = \pm 1$

連続性から $\det \mathcal{F}_0 = 1$

空間曲線の曲率

$\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$: 弧長によりパラメータづけられた空間曲線,

$$\boldsymbol{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s) \qquad |\boldsymbol{e}| = 1 \qquad \text{単位接ベクトル}$$

$$\kappa(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}(s)\right| (\geqq 0) \qquad \text{曲率}$$

(平面 $\dfrac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}$)

$$0 = \frac{d}{ds}(\underbrace{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}}_{=1}) = 2\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}\cdot\boldsymbol{e} \qquad \therefore\ \frac{d\boldsymbol{e}}{ds} \perp \boldsymbol{e}$$

($\boldsymbol{e}$ に直交する方向の代表)

子 (フルネ枠)

空間曲線のフルネ枠

$\frac{de}{ds}$ $\quad e = \gamma'$

$\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$：弧長によりパラメータづけられた空間曲線．
以下 $\boxed{\kappa = |\gamma''|\text{ が零点をもたない}}$ とする．$\quad (\kappa \gneq 0)$

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{1}{|\gamma''(s)|}\gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{de}{ds}(s),$$

単位主法線ベクトル principal normal

normal $\quad 0 < \kappa(s)$

$$\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

単位従法線ベクトル binormal

ベクトル積 (外積)

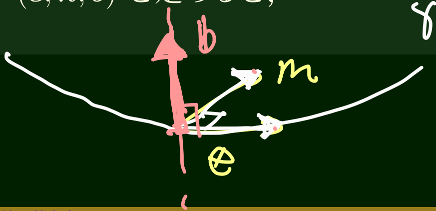
補題

ここまでの状況で，各 s において $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基を与える．さらに $\mathcal{F}\colon = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ と定めると，
$\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ である．

右手系

$\mathcal{F}$：曲線 γ のフルネ枠．

frame



捩率とフルネ・セレの公式

$$\tau(s) := \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s).$$

捩率　ねじれ

捩

定理 (フルネ・セレの公式)

弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとき，そのフルネ枠を $\mathcal{F}$，曲率，捩率をそれぞれ κ，τ とすると次が成り立つ：

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\boxed{\text{交代}}$

一般に $\mathcal{F}: J \to O(3)$

$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}' : \text{交代}}$

$\mathcal{F} = (e\ n\ b)$

- $\Omega := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}' = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}'$ とおくと Ω は交代行列

$$^t\Omega + \Omega = O$$

- $\mathcal{F} = (e, n, b)$

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}}_{\Omega}$$

$$e' = \kappa n \quad \left(n = \frac{e'}{\kappa}\right)$$

$$-b' \cdot n = \tau$$

$$b' = \bigcirc e + \overset{-\tau}{\bigcirc} n + \bigcirc b$$

空間曲線の基本定理

定理

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，振率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

平面曲線と同様、

例：つるまき線

ふたつの 0 でない定数 a, b に対して

$$\gamma(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, bt)$$

とおく（問題 1-2 参照）.

- $\tilde{\gamma}(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$

  弧長表示

- $\kappa = \dfrac{|a|}{c^2}$ $\tau = \dfrac{b}{c^2}$: 定数

κ, τ : どちらも 0 でない 定数 $\Longrightarrow$ つるまき線

問題 3-1

問題

$J=(-1,1)$ で定義された，弧長 s をパラメータにもつ空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ，捩率 τ が，定数 α に対して

フルネ・セレ

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1-s^2}}$$

を満たしているとする．γ の単位速度ベクトルを $\boldsymbol{e}(s)$，主法線ベクトル，従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ とするとき，次のすべての条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の線形結合で表しなさい：

$\frac{dv}{ds} = 0$

$v = a_1 e(s) + a_2 n(s) + a_3 b(s)$

1. $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s)$ は s によらず一定，
2. $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ の成す角は s によらず一定，
3. $|\boldsymbol{v}|=1$.

問題 3-2

問題

弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における微分係数 $\gamma'(s_0)$, $\gamma''(s_0)$, $\gamma'''(s_0)$ をフルネ枠 $\boldsymbol{e}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, $\boldsymbol{b}(s_0)$ の線形結合で表しなさい.

係数 にとってできる?

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2}\gamma''(s_0)(s-s_0)^2 + \frac{1}{3!}\gamma'''(s_0)(s-s_0)^3 + \cdots$$

問題 3-3

問題

例 3.4 を真似て空間曲線の基本定理 3.6 に証明を与えなさい.

本日の課題の提出締切は

2021年10月25日（月曜日）07:00 JST