# 幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/21 (2021/10/28 訂正)

# 平面曲線の基本定理の別証明

## 定理 (平面曲線の基本定理（存在パート）)

$C^\infty$-級関数 $\kappa\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた $C^\infty$-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率が $\kappa$ となるものが存在.

- 点 $s_0 \in J$ を固定して，線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}(s_0) = I \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$

  の解 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ をとる.
- 各 $s \in J$ に対して $\mathcal{F}_0(s) \in \mathrm{SO}(2)$．とくに $\mathcal{F}_0$ の列ベクトルは正の正規直交系を成す.
- $\mathcal{F}_0(s) = \big(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\big)$ と分解して，次が求める曲線：

$$\gamma_0(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\, du$$

# 空間曲線の曲率

$\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$：弧長によりパラメータづけられた空間曲線,

$$\boldsymbol{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s) \qquad \text{単位接ベクトル}$$

$$\kappa(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}(s)\right| (\geqq 0) \qquad \text{曲率}$$

# 空間曲線のフルネ枠

$\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$：弧長によりパラメータづけられた空間曲線.
以下 $\underline{\kappa = |\gamma''| \text{ が零点をもたない}}$とする.

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{1}{|\gamma''(s)|}\gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s), \qquad \text{単位主法線ベクトル}$$

$$\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s) \text{単位従法線ベクトル}$$

## 補題

ここまでの状況で，各 $s$ において $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基を与える．さらに $\mathcal{F}\colon = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ と定めると，$\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ である．

$\mathcal{F}$：曲線 $\gamma$ のフルネ枠.

# 捩率とフルネ・セレの公式

$$\tau(s) := -\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s). \qquad \text{捩率}$$

**定理 (フルネ・セレの公式)**

弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma$ の加速度ベクトルが零とならないとき，そのフルネ枠を $\mathcal{F}$，曲率，捩率をそれぞれ $\kappa$, $\tau$ とすると次が成り立つ：

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

# 空間曲線の基本定理

## 定理

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの $C^\infty$-級関数 $\kappa$, $\tau$ が与えられとくに $\kappa > 0$ が $J$ 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた $C^\infty$-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ $\kappa$, $\tau$ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$（$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

# 例：つるまき線

ふたつの 0 でない定数 $a$, $b$ に対して

$$\gamma(t) = {}^t\!\left(a\cos t, a\sin t, bt\right)$$

とおく（問題 1-2 参照）.

# 問題 3-1

## 問題

$J = (-1, 1)$ で定義された，弧長 $s$ をパラメータにもつ空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 $\kappa$，捩率 $\tau$ が，定数 $\alpha$ に対して

$$\kappa(s)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1-s^2}}$$

を満たしているとする．$\gamma$ の単位速度ベクトルを $\boldsymbol{e}(s)$，主法線ベクトル，従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ とするとき，次のすべての条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の線形結合で表しなさい：

1. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ は $s$ によらず一定,
2. $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ の成す角は $s$ によらず一定,
3. $|\boldsymbol{v}| = 1$.

# 問題 3-2

## 問題

弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における微分係数 $\gamma'(s_0)$, $\gamma''(s_0)$, $\gamma'''(s_0)$ をフルネ枠 $\boldsymbol{e}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, $\boldsymbol{b}(s_0)$ の線形結合で表しなさい.

# 問題 3-3

## 問題

例 3.4 を真似て空間曲線の基本定理 3.6 に証明を与えなさい.