2021 年 10 月 21 日 (2021 年 11 月 04 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 3

■お知らせ

- 提出課題が 3 ページからなっている方 1 名，1 ページの方 1 名．手順が乱れるので必ず 2 ページにしてください．

■前回の補足

- 講義資料 1，1 ページ下から 2 行目：「Z と 100 のうち大きくない方」は不要というご意見がありました．ごもっとも．
- 講義資料 2, 5 ページ，命題 2.3 の証明で a_{12} と a_{21} を逆にしたほうが行列として見やすい，というご意見がありましたが，Ω の i 行 j 列成分を a_{ij} と書くと証明の 2 行目のような式になります．
- 弧長パラメータでないときのフルネ枠，フルネの公式はどうなるか，というご質問を複数いただいています：フルネ枠は $\boldsymbol{e}=\dot\gamma/|\dot\gamma|$, $\boldsymbol{n}=R\boldsymbol{e}$ とおけばよいでしょう．弧長を s とすると $ds/dt=|\dot\gamma|$ なので $\dot{\boldsymbol{e}}=|\dot\gamma|\kappa\boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{n}}=-|\dot\gamma|\kappa\boldsymbol{e}$.
- 命題 2.5 の証明，$\tilde\kappa(s)\tilde{\boldsymbol{n}}(s)=\dots$ からどうやって結論を示すか，というご質問が複数：$\det(\tilde{\boldsymbol{e}},\tilde{\boldsymbol{n}})=1$ なので $\tilde\kappa=\det(\tilde{\boldsymbol{e}},\tilde\kappa\tilde{\boldsymbol{n}})$.
- 曲率から平面曲線の表示を与える式（定理 2.7 の証明）はどのようにして導いたのかというご質問が複数ありました．概略は次のとおり：$\gamma'(s)=\boldsymbol{e}(s)$ は単位ベクトルだから，関数 θ を用いて $\boldsymbol{e}(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ とかけるので，$\boldsymbol{n}(s)=(-\sin\theta(s),\cos\theta(s))$．したがってフルネの公式 $\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$ から $\kappa=\theta'$．ここから逆算していけばよい．
- 空間曲線を考えたときフルネ枠はどうなるか，というご質問が複数．今回やります．

■前回までの訂正

- 講義資料 2, 1 ページ，前回の補足 6 行目：自動的に $|\dot\gamma(t)|$ は自動的に $\Rightarrow$ $|\dot\gamma(t)|$ は自動的に
- 講義資料 2, 5 ページ，命題 2.1 の証明の 2 行目：逆関数 $t\mapsto t(s)$ $\Rightarrow$ $s\mapsto t(s)$.
- 講義資料 2, 5 ページ，命題 2.1 の証明の 3 行目の最後の等号の前：$\frac{1}{|\dot\gamma(t(s))|}\left|\frac{d\gamma}{ds}(t(s))\right|=1 \Rightarrow \frac{1}{|\dot\gamma(t(s))|}\left|\frac{d\gamma}{dt}(t(s))\right|=1$
- 講義資料 2, 5 ページ，一番下の行：$a_{12}(s)=\kappa(s)$ とおくと $\Rightarrow$ $a_{21}(s)=\kappa(s)$ とおくと
- 講義資料 2, 6 ページ，2 行目：$\gamma\bigl(t(s)\bigr)$ その弧長パラメータ表示 $\Rightarrow$ $\gamma\bigl(t(s)\bigr)$ をその弧長パラメータ表示
- 講義資料 2, 6 ページ，補題 2.6，1 行目：平面曲線の γ の $\Rightarrow$ 平面曲線 γ の
- 映写資料 A, 2 ページ：2021 年 10 月 11 に提出 $\Rightarrow$ 2021 年 10 月 11 日に提出；映写資料 C, 3 ページ：3 行目の最後にピリオド．
- 講義資料 2, 6 ページ，定理 2.7 の存在の部分で，積分の下端 s_0 はテキストで 0 となっている，というご指摘がありました．$0\in J$ ならどちらでも結構ですが J が 0 を含まないこともあるので，s_0 としました．
- 黒板 B, 9 ページ目：$\cosh^{-1}(e^s)=\log(e^s+\sqrt{e^{2s}-1})$.

■授業に関する御意見

- 定義・定理を扱ったあとにものすごく簡単な例が欲しいです（課題をのぞく）　**山田のコメント：** 数学系 2 年後期なので，あまり「手取り足取り」やるのは失礼だと思っています．定理のステートメントを見て意味を探る習慣を身に着けて下さい．「課題」はそのためのヒントのつもりです．なお，本日の講義資料の例 3.3 はご所望のものでしょうか．
- 計算が大変でした（問題 2-1 (2) の後半）．/積分が大変です（たいへん）　**山田のコメント：** そんなに？
- 曲率関数 κ から平面曲線 γ が定まるのは不思議だと感じた．定理 2.7 は偉大だ．　**山田のコメント：** 曲率は自動車のハンドルの傾き，弧長パラメータはつねに速さ 1 で走行すること，と考えると自然ですね．
- 曲率すごい．　**山田のコメント：** そう？
- 曲率というのは向心力みたいだなと思った．　**山田のコメント：** 速さが 1 のときの加速度ベクトルの大きさですからね．
- $\mathbb{R}^2$ の元は授業では列ベクトルとして表されていると思います．行ベクトルで書かれているものもネット上などで見ることもありますが，この授業では列ベクトルで書くと考えて良いでしょうか．　**山田のコメント：** はい．行列を左から掛けたいので．
- 自分はいつも資料を印刷して用いるので，資料の修正箇所が明示されていることで印刷をしなおさずにすんでたすかっています．　**山田のコメント：** なるほど．
- 転置の記号 ^{t} を普通に入力すると指数のように見えてしまうので "\!" などを使って間隔を調整したほうが見やすくなる．　**山田のコメント：** コメントありがとうございます．
- 前回 LuaLaTeX で書いていましたが，今回先生の助言の通りに jsarticle と zw, zh にしたら pLaTeX でもできました．ありがとうございました．　**山田のコメント：** よかった．
- 前回の講義の提出問題にもかなり時間をかけて解説して下さり，実際には自分が解いていなかった問題についても理解を深めることが出来ました．ありがとうございました．　**山田のコメント：** どういたしまして．問題を解くのも授業の一部です．
- 「質問/誤りの指摘」と「感想/ご意見/ご希望」の欄はデジタルなテキストで記入すると、コピペが可能になるので次の回の資料作成時に先生の負担が減ることになりますか？　**山田のコメント：** はい，ありがとうございます．
- 講義資料は課題の採点後に作成していたのですね．そうとは知らず，講義資料の作成の催促をしてしまいすみません．私個人の意見としては，＊＊系の研究室に所属しており，平日は実験の予定等が入るため，課題の提出期限は今のままがいいです．講義資料は当日の朝に印刷すれば済みますので．　**山田のコメント：** 了解．

■質問と回答

質問 1： 問題 1-2 の逆「特異点をもつ C^∞-級の平面曲線 γ に対して，ある正則な空間曲線 $\tilde{\gamma}$ が存在して，曲線 $\tilde{\gamma}$ の平面 $z=0$ への正射影は γ になる」の真偽を考えたところ答えは真になりました．このことから，特異点をもつ C^∞-級の平面曲線の研究は正則な空間曲線の研究に帰着されると思いました．特異点の研究ではこのような事実はしばしば使われるのでしょうか． **お答え：** $\gamma(t)={}^t\big(x(t),y(t)\big)$ に対して $\tilde{\gamma}(t)={}^t\big(x(t),y(t),t\big)$ でよい．特異点の研究で問題に応じて様々な空間正則曲線を考えます．

質問 2： $\kappa(t)=\frac{\det(\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$ の証明で t が弧長のときは（中略）導出できたのですが，弧長でないときがわかりませんでした．証明の概観だけでも教えていただけると嬉しいです． **お答え：** 講義資料 6 ページに証明がありますが．

質問 3： 命題 2.5 の証明の下から 2 行目の式変形の部分が追えなかったのですが，簡単に教えて下さると幸いです．

お答え： 訂正がありましたので要確認．3 つ目の等号は積の微分公式．

質問 4： κ を $-\kappa$ にした曲線は $\mathrm{O}(2)\setminus\mathrm{SO}(2)$ で移り合える気がしたのですが正しいですか．

お答え： 正しいです．曲率 κ をもつ曲線 γ のフルネ枠 $\mathcal{F}$ に対して $\widetilde{\mathcal{F}}:=\mathcal{F}S$ $\left(S:=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)$ を考えるとわかります．

質問 5： 曲線の曲率が定数で表されるとき，その値を定数倍した曲率をもつ曲線も円であるのに対し，曲率が定数でないときはかなり違う曲線になる（こともある？）ことが，私がたまたま問題の $\kappa(s)$ を見間違えたことにより分かりました．このように，曲率が定数でなく，かつ 2 曲線の曲率が定数倍になっているときでも，2 つの曲線が相似になったりすることはつねにないのでしょうか． **お答え：** ないです．弧長も定数倍されてしまうので．

質問 6： 定義 2.4 で κ がパラメータ変換に依存せずに一意に定まることは命題 2.5 によりますか. **お答え：** No. 定義 2.4 $\to$ 命題 2.5.

質問 7： n 次元でも曲率は定ギされますか？ **お答え：** はい．

質問 8： 曲率を curvature の c ではなく κ と書くのは，始めて研究したホイヘンスの母国語のオランダ語で krom が曲がったという意味だからでしょうか． **お答え：** どうでしょう．kromming か Krümmung か...

質問 9： $\boldsymbol{e}(s)$ に対して 90° 回転したものを $\boldsymbol{n}(s)$ としているが 30° や 60° 回転したものを $\boldsymbol{n}(s)$ としても考えることはできるのか？ **お答え：** それを考えても同等の理論ができます．計算が面倒になりますが．

質問 10： なぜ正規直行基底（原文ママ）を使うのでしょうか？（中略）$d\boldsymbol{e}/ds=\kappa\boldsymbol{n}$ だけでいいと思いました． / フルネの公式は 4 成分あるうち 2 成分のみが独立な方程式であるが，このような行列を用いるメリットが解らない．証明で使われるからこう書いただけですか． **お答え：** ここではそう．「行列で書くと見通しがよい」．

質問 11： 曲率 1 の曲線と曲率 -1 の曲線は，回り方の向きが異なる同じ円を表すというのは正しいですか. **お答え：** はい．

質問 12： 平面曲線の基本定理において γ は少なくとも C^2-級あればよいですか？ **お答え：** おっしゃるとおりです．

質問 13： 円の曲率が半径で決まる定数なのは偶然なのだろうか．（曲率の成り立ちに円は関わっているのでしょうか）

お答え： はい，関わっています．11 月 11 日くらいの講義で「接触円」を扱います．

質問 14： 一般の平面曲線（パラメータ表示）での曲率 $\kappa(s)$ について，その点 $\gamma(s)$ の近傍で半径が $1/\kappa(s)$ の円周の弧に一致するような曲線になっているというようにイメージできるのですが，$\mathbb{R}^3$ 上での曲線や曲面でも同様に接するような球面を考えると曲率のイメージがしやすいのでしょうか． **お答え：**「一致する」は「近似できる」，後日扱う．空間曲線の場合は球面ではなく円，曲面だと球面だけでは近似しきれないので 2 次曲面を用いる．

質問 15： 円を円周で弧長パラメータされた曲線としてみると（山田注：文が変）これはラジアンとなって角度の評価ができますが，これと同じように曲率で曲線が一周する（もしくは交差する等）を判定することはできるのでしょうか．

お答え： 曲率で曲線が決まるのだから原理的には決まるが判定は難しい．今回少しだけ例を挙げます．

質問 16： 平面曲線の基本定理の証明で出てきた $\gamma(s)$ の具体的な表示は他には定数差のみという考えで正しいでしょうか．

お答え： いいえ．回転させても曲率は同じですよね．

質問 17： 曲線が与えられると曲率が分かりました．“平面曲線の基本定理” より，“曲率が与えられると（等長変換を除いて）曲線が定まる” ことが分かりました．つまり曲率から曲線を定義できました．ここで質問ですが，他に曲線を定義することはできますか．またそのような学問はありますか． **お答え：** 平面曲線の合同類を表示する曲率とは他の不変量があるか，というご質問でしょうか．原理的にはいくらでもあります．たとえば $\sinh\kappa$．この講義はユークリッド幾何の範疇で考えますが，平面に別の構造を考えると曲線を定める不変量も別のものをとります．たとえば「井ノ口順一 “曲線とソリトン”（朝倉書店）」の後半．

質問 18： 平面曲線の弧長でないパラメータの曲率関数について，その関数を弧長パラメータをもつ曲線の曲率とみたとき，2 つの曲線は向きを保つ等長変換で一致するのでしょうか． **お答え：** たとえば $\gamma_1(t):={}^t\big(\log(t+\sqrt{1+t^2}),\sqrt{1+t^2}\big)$, $\gamma_2(t):={}^t\big(4\tan^{-1}t-2t,2\log(1+t^2)\big)$ の曲率関数は $1/(1+t^2)$ ですが合同変換で移り合いません．

質問 19： 定理 2.7 で曲率関数が...$\gamma(s)=\dots$（中略）を挙げているが他にも存在するのか． **お答え：** ステートメントの後半．

質問 20： 課題の問題 2 について，$\kappa(s)$ が周期関数でない場合も任意の $L\in\mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L)=A\gamma(s)+\boldsymbol{a}$ の形で表すことはできないのでしょうか．弧長パラメータを定数分ずらすことはフルネ枠の初期値のみを変えることを意味しているように感じました． **お答え：** A や $\boldsymbol{a}$ は L や s によらないんですか？

質問 21： 弧長パラメータの定数差を除いた一意性（講義資料の Prop 2.2）について質問です．命題の文自体には記されていませんが，証明では「パラメータ変換で移り合う曲線のパラメータ表示」に限定していますが，命題自体も「パラメータ（中略）」の下での一意性ということでしょうか．最初に命題のみを読んだ時に「同一の像を与える任意のパラメータ表示」に対しての一意性だと思ったので混乱しました． **お答え：** 弧長であることから同等です（パラメータ変換の微分は消えない）．

質問 22： 今回の授業中で『群は同値関係と同等である』という趣旨の内容を聞きました．興味深く感じ，上に自分なりの解釈とその説明を記しました．上記の理解（略）で問題ないでしょうか． **お答え：** ちょっと違う．「群作用と同値関係」で調べてみましょう．

質問 23： 曲率を出すことで何が嬉しいのか． /曲率を定義することでえられる恩恵は何ですか？

お答え： 嬉しくなくてもよいではないか（マジレスすると「平面曲線の基本定理」．他にもたくさんいいことがある）．

3 空間曲線の基本定理

■フルネの公式と平面曲線の基本定理（復習） 弧長 s によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ に対して[*1]単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$ と左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ をとり，それらを並べた $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))\colon J \to \mathrm{SO}(2)$ を**フルネ枠**という．このとき，**フルネの公式**

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s) \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで $\kappa(s)$ は曲線 γ の**曲率**とよばれる関数である．

定理 3.1 (平面曲線の基本定理)**.** 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上の C^∞-級関数 $\kappa(s)$ に対して，弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で曲率が $\kappa(s)$ となるものが，変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$（$A \in \mathrm{SO}(2)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$）を除いて一意に存在する．

3.1 線形常微分方程式

一般に，区間 $J \subset \mathbb{R}$ と領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ の直積上で定義された関数 $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ に対して，関係式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t; \boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \in U) \tag{3.2}$$

を，$\boldsymbol{y}(t)$ を未知関数とする（正規形の）**常微分方程式**の初期値問題，$\boldsymbol{a}$ を**初期条件**という．ただし $t_0 \in J$ は区間 J 上の固定された点である．区間 J に含まれ，t_0 を含む区間 J' で定義された関数 $\boldsymbol{y}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が (3.2) を満たすとき，これを初期値問題 (3.2) の**解**という．さらに $\boldsymbol{f}(t; \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ の各成分について一次式であるとき，(3.2) は**線形常微分方程式**という．

定理 3.2 (常微分方程式の基本定理)**.** 以上の状況で $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ が C^∞-級ならば，t_0 を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ 上で定義された初期値問題 (3.2) の C^∞-級の解がただ一つ存在する．とくに (3.2) が**線形常微分方程式**であるとき，解は J **全体で定義された** C^∞-級関数である．

例 3.3.
- $n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t; y) = \alpha y$（$\alpha$ は定数），$t_0 = 0$ とする．このとき，(3.2) は $y' = \alpha y$, $y(0) = a$（a は実数）と書ける．$y(t) = a\exp(\alpha t)$ はこの初期値問題の $J = \mathbb{R}$ 上で定義された解である．
- $n = 2$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y} = {}^t(x, y)$, $\boldsymbol{f}(t; x, y) = {}^t(y, -k^2 x)$（$k > 0$ は定数），$t_0 = 0$, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b)$ とする．このとき (3.2) は $x' = y$, $y' = -k^2 x$, $x(0) = a$, $y(0) = b$ となる．これはフックの法則に従う力のもとでの運動方程式 $y'' = -k^2 y$ を (3.2) の形に表したものであり，$k \neq 0$ のとき $x(t) = a\cos kt + (b/k)\sin kt$ は $J = \mathbb{R}$ 上で定義された解である．
- $n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t; y) = y(1 - y)$，$t_0 = 0$ とすると (3.2) は $y' = y(1 - y)$，$y(0) = a$（$a \in \mathbb{R}$）[*2]．$y(t) = \frac{a}{a + (1-a)e^{-t}}$ は解である．$a \in [0, 1]$ のとき y は $J = \mathbb{R}$ 全体で定義されるが，それ以外の a では $\mathbb{R}$ 全体で定義されない．

例 3.4 (平面曲線の基本定理の別証明の概略)**.** 与えられた $\kappa(s)$ に対して (3.1) は行列 $\mathcal{F}$ の 4 つの成分を未知関数とした線形常微分方程式．とくに $s_0 \in J$ を固定して初期条件 $\mathcal{F}(s_0) = A \in \mathrm{SO}(2)$ を満たす解を $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ と書く．$\mathcal{F}$ が (3.1) を満たすなら $A\mathcal{F}$ も同じ方程式を満たすので，初期条件を比較することで $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}_I$ が成り立つ．とくに $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ は $\frac{d}{ds}(\mathcal{F}^t\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\Omega + {}^t\Omega)^t\mathcal{F} = O$ を満たすので $\mathcal{F}^t\mathcal{F}$ は s によらない定行列．$A \in \mathrm{SO}(2)$ だから $\mathcal{F}(s)^t\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s_0)^t\mathcal{F}(s_0) = A^tA = I$．したがって $\mathcal{F}(s)$ は直交行列．このとき $\det\mathcal{F}(s)$ は ± 1 なので，$\mathcal{F}$ の連続性により s によらない定数だが $A \in \mathrm{SO}(2)$ より $\det\mathcal{F}(s) = 1$．以上より C^∞-級写像 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A\colon J \to \mathrm{SO}(2)$ が得られた．

存在：$\mathcal{F}(s) := \mathcal{F}_I(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$ と書き，$\gamma_0(s) := \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$ とおけば，γ_0 が求めるものである．

一意性：曲線 γ の曲率が κ であるとすると，γ のフルネ枠 $\mathcal{F}_\gamma$ は (3.1) を満たす．とくに s_0 において $\mathcal{F}_\gamma(s_0) = A \in \mathrm{SO}(2)$ とすると，解の一意性から $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_A$．存在の証明で得られた初期条件 $\mathcal{F}(s_0) = I$ を満たす解 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A := A\mathcal{F}$ とおくと $\mathcal{F}_A$ は (3.1) の初期条件 $\mathcal{F}_A(s_0) = A$ を満たす解．したがって $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_A = A\mathcal{F}_I$，とくに $\gamma' = A\gamma_0'$ なので $\gamma = A\gamma_0 + \boldsymbol{a}$.

3.2 空間曲線の基本定理

弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$ を考える．

$$\boldsymbol{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s), \qquad \kappa(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}(s)\right|$$

2021 年 10 月 21 日 (2021 年 11 月 04 日訂正)

[*1] 今回もとくに断らない限り曲線のパラメータ表示などは C^∞-級であるとしておく．

[*2] この方程式を**ロジスティック方程式**とよぶ．

と定めると，$\boldsymbol{e}$ の大きさは 1，$\kappa\colon J \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ である．$\boldsymbol{e}$ を γ の**単位接ベクトル**，κ を**曲率**と呼ぶ．

この節では以下 κ が零点をもたない，すなわち γ'' が零にならないとしておく．このとき

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{1}{|\gamma''(s)|}\gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s), \qquad \boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

と定め，$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ γ の**単位主法線ベクトル**，**単位従法線ベクトル**とよぶ．ただし “$\times$” は $\mathbb{R}^3$ の**ベクトル積**を表す．

補題 3.5. ここまでの状況で，各 s において $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基を与える．さらに $\mathcal{F}\colon = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ と定めると，$\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ である．

補題 3.5 の $\mathcal{F}$ を空間曲線 γ の**フルネ枠**という．とくに次で与えられる関数 τ を γ の**捩率**という：

$$\tau(s) := -\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s). \tag{3.3}$$

定理 3.6 (フルネ・セレの公式)**.** 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとき，そのフルネ枠を $\mathcal{F}$，曲率，捩率をそれぞれ κ, τ とすると次が成り立つ：

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right). \tag{3.4}$$

証明： 行列値関数 $\Omega = \Omega(t) = (a_{ij}(t))$ を $\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ で定めるとフルネ枠 $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ の各列ベクトルの微分は $\boldsymbol{e}' = a_{11}\boldsymbol{e} + a_{21}\boldsymbol{n} + a_{31}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}' = a_{12}\boldsymbol{e} + a_{22}\boldsymbol{n} + a_{32}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}' = a_{13}\boldsymbol{e} + a_{23}\boldsymbol{n} + a_{33}\boldsymbol{b}$ と書ける．κ と $\boldsymbol{n}$ の定義から $a_{11} = a_{31} = 0$, $a_{21} = \kappa$，また捩率の定義から $a_{23} = -\tau$．ここで $\mathcal{F}$ は $\mathrm{SO}(3)$ に値をとることから

$$\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}' = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = ({}^t\mathcal{F}\mathcal{F})' - ({}^t\mathcal{F})'\mathcal{F} = (I)' - {}^t(\mathcal{F}\Omega)\mathcal{F} = -{}^t\Omega{}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = -{}^t\Omega.$$

すなわち Ω は交代行列なので結論を得る．

定理 3.7 (空間曲線の基本定理)**.** 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$（$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

例 3.8 (つるまき線)**.** ふたつの 0 でない定数 a, b に対して $\gamma(t) = {}^t\bigl(a\cos t, a\sin t, bt\bigr)$ とおく（問題 1-2 参照）．弧長パラメータで表示しなおすと，

$$\tilde{\gamma}(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right) \qquad \left(c = \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

したがって定義通りに計算すれば曲率，捩率はそれぞれ $\kappa = |a|/c^2$, $\tau = b/c^2$ となる．

系 3.9. 曲率が正の定数，捩率が零でない定数であるような空間曲線はつるまき線の一部に合同である．

問題

3-1 $J = (-1, 1)$ で定義された，弧長 s をパラメータにもつ空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ，捩率 τ が，定数 α に対して

$$\kappa(s)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1 - s^2}}$$

を満たしているとする．γ の単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$，単位主法線ベクトル，単位従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ とするとき，次のすべての条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の線形結合で表しなさい：
(1) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ は s によらず一定， (2) $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ の成す角は s によらず一定， (3) $|\boldsymbol{v}| = 1$.

3-2 弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における微分係数 $\gamma'(s_0)$, $\gamma''(s_0)$, $\gamma'''(s_0)$ をフルネ枠 $\boldsymbol{e}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, $\boldsymbol{b}(s_0)$ の線形結合で表しなさい．

3-3 例 3.4 を真似て空間曲線の基本定理 3.7 に証明を与えなさい．