幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の局所的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/28

問題 3-3

平面曲線の基本定理の証明

問題

例 3-4 を真似て空間曲線の基本定理 3.7 に証明を与えなさい.

定理 (空間曲線の基本定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{SO}(3), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$ を除いて一意的である.

$\kappa, \tau \overset{\exists!}{\longmapsto}$ 曲線

$\oplus$

フルネ・セレの公式

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$: 空間曲線; s: 弧長;
- $\boldsymbol{e} := \gamma'$; $\kappa := |\gamma''|$ (≥ 0) 仮定 : $\kappa > 0$ $\neq$
- $\boldsymbol{n} := \gamma''/\kappa$; $\boldsymbol{b} := \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$; $\tau := -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n}$.

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})\colon J \to \mathrm{SO}(3) \qquad \text{(フルネ枠)}$$

$(e, n, b)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

命題 (フルネ・セレの公式)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(e', n', b')

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

空間曲線の基本定理の証明—一意性

- $\gamma, \tilde{\gamma}\colon J \to \mathbb{R}^3$：空間曲線の弧長パラメータ表示
- $\gamma, \tilde{\gamma}$ の曲率 κ，振率 τ は共通.

$\gamma, \tilde{\gamma}$ のフルネ枠をそれぞれ $\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{F}}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ ~~とすると~~

$$\underline{\overset{\mathrm{SO}(3)\ni}{}\ \tilde{\gamma} = A\gamma + a^{\in\mathbb{R}}}$$

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega, \qquad \widetilde{\mathcal{F}}' = \widetilde{\mathcal{F}}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$(\tilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F})' = \cdots = \tilde{\mathcal{F}}\,\underbrace{(\Omega + {}^t\Omega)}_{O}\,{}^t\mathcal{F} = O$$

$$\underset{\in \mathrm{SO}(3)}{\tilde{\mathcal{F}}}\ \underset{\in \mathrm{SO}(3)}{{}^t\mathcal{F}} = A^{\in \mathrm{SO}(3)} : \mathrm{const} \qquad {}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = A\mathcal{F}$$

$$\tilde{e} = Ae$$

$$\tilde{\gamma}' = A\gamma'$$

「SO(3)のLie環は交代行列全体」

空間曲線の基本定理の証明—存在

平面 $\int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du$

与えられた κ, τ に対して，線形常微分方程式の初期値問題

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(s_0) = I \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right)$$

何でもいい $\in SO(3)$

の解を $\mathcal{F}$ とする

$({}^t\mathcal{F}\mathcal{F})' = 0$

${}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = \text{const} = {}^t\mathcal{F}(s_0)\mathcal{F}(s_0) = I$

- $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$.
- $\mathcal{F} = (\underbrace{\boldsymbol{e}}_{\gamma'}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ とおき $\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$ とおく
- これが求めるものである．

確かめた？

(s: 弧長 ∴ $|e| = 1$ ∵ $\mathcal{F} \in SO(3)$
κ: 曲率 τ: 捩率)

問題 3-1

問題

$J=(-1,1)$ で定義された，弧長 s をパラメータにもつ空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ，捩率 τ が，定数 α に対して

($\sqrt{2}:\alpha=1$ のとき)

$$\tau=\alpha\kappa \qquad \kappa(s)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \tau(s)=\frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1-s^2}}$$

を満たしているとする．γ の単位速度ベクトルを $\boldsymbol{e}(s)$，主法線ベクトル，従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ とするとき，次のすべての条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の線形結合で表しなさい：

1. $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s)$ は s によらず一定,
2. $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ の成す角は s によらず一定,
3. $|\boldsymbol{v}|=1$.

$\forall s \quad \{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$: $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底

条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を次のように書く：

定傾曲線

$$\boldsymbol{v}(s) = A(s)\boldsymbol{e}(s) + B(s)\boldsymbol{n}(s) + C(s)\boldsymbol{b}(s).$$

$A = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}$

1. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ は s によらず一定,

$0 = \boldsymbol{v}' = A'\boldsymbol{e} + A\boldsymbol{e}' + B'\boldsymbol{n} + B\boldsymbol{n}' + C'\boldsymbol{b} + C\boldsymbol{b}'$

2. $\boldsymbol{v}$ と $\underbrace{\gamma'(s)}_{\boldsymbol{e}}$ の成す角は s によらず一定,

$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e} = A = \mathrm{const}$

$\boldsymbol{v} = (\underbrace{\alpha}_{\mathrm{const}}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b})$

$\tau = \kappa\alpha$

3. $|\boldsymbol{v}| = 1.$

$\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\alpha\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b})$

$B = 0$

$A - \alpha C = 0$

$= (\cancel{A'} - \kappa B)\boldsymbol{e} + (\cancel{B'} + \kappa A - \tau C)\boldsymbol{n} + (\cancel{C'} + \cancel{\tau B})\boldsymbol{b}$

$\tau = \kappa\alpha$

具体的な解？ 求まる非自明な例

$$u := \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \sqrt{2}\sin^{-1} s$$

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1-s^2}} = \alpha\kappa$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}\mathcal{F}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

Ω_0 定行列

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{F}}{du} = \mathcal{F}\Omega_0 \qquad \mathcal{F}(0) = I$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F} = \operatorname{Exp}(u\Omega_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\Omega_0^k$$

$\operatorname{Exp} u\Omega_0$?

$\beta := \sqrt{1+\alpha^2}$

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \alpha/\beta & 0 & -1/\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\beta & 0 & \alpha/\beta \end{pmatrix}$$

$\in SO(3)$

$$P^{-1}\Omega_0 P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = \Lambda$$

$$\operatorname{Exp} u\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta u & -\sin\beta u \\ 0 & \sin\beta u & \cos\beta u \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Exp} u\Omega_0 = P\left(\operatorname{Exp} u\Lambda\right)P^{-1}$$

問題 3-2

問題

$\kappa \neq 0$

弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における微分係数 $\gamma'(s_0)$, $\gamma''(s_0)$, $\gamma'''(s_0)$ をフルネ枠 $\boldsymbol{e}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, $\boldsymbol{b}(s_0)$ の線形結合で表しなさい.

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau \boldsymbol{n}$$

$\gamma'(s_0) = \boldsymbol{e}(s_0) \qquad \gamma''(s_0) = \kappa(s_0)\,\boldsymbol{n}(s_0)$

$\gamma''' = (\kappa \boldsymbol{n})' = \kappa' \boldsymbol{n} + \kappa \boldsymbol{n}'$

$= -\kappa^2 \boldsymbol{e} + \kappa' \boldsymbol{n} + \kappa\tau \boldsymbol{b}$

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_0+\delta) &= \gamma(s_0) + \delta \underbrace{\boldsymbol{e}(s_0)}_{} + \frac{1}{2}\delta^2 \underbrace{\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0)}_{} \\
&\quad + \frac{1}{6}\delta^3 \underbrace{\bigl(-\kappa(s_0)^2\boldsymbol{e}(s_0) + \kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0)\bigr)}_{} \\
&\quad + o(\delta^3) \\
&= \gamma(s_0) + \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa_0(s_0)^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{e}(s_0) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{n}(s_0) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{b}(s_0)
\end{aligned}
$$

γ' γ'' γ'''

$o(\delta^3) = f(\delta)$ $\quad \lim_{\delta\to 0} \frac{f(\delta)}{\delta^3} = 0$