幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の局所的性質

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/28

問題 3-3

問題

例 3-4 を真似て空間曲線の基本定理 3.7 に証明を与えなさい.

定理 (空間曲線の基本定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ, とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma \colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である.

フルネ・セレの公式

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$: 空間曲線; s: 弧長;
- $\boldsymbol{e} := \gamma'$; $\kappa := |\gamma''|$;　　　仮定：$\kappa > 0$
- $\boldsymbol{n} := \gamma''/\kappa$; $\boldsymbol{b} := \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$; $\tau := -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n}$.

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})\colon J \to \mathrm{SO}(3) \qquad \text{(フルネ枠)}$$

命題 (フルネ・セレの公式)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

空間曲線の基本定理の証明—一意性

- γ, $\tilde{\gamma}\colon J \to \mathbb{R}^3$：空間曲線の弧長パラメータ表示
- γ, $\tilde{\gamma}$ の曲率 κ, 捩率 τ は共通.

γ, $\tilde{\gamma}$ のフルネ枠をそれぞれ $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ とすると

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega, \qquad \widetilde{\mathcal{F}}' = \widetilde{\mathcal{F}}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

空間曲線の基本定理の証明—存在

与えられた κ, τ に対して，線形常微分方程式の初期値問題

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(s_0) = I \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right)$$

の解を $\mathcal{F}$ とする．

- $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$.
- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ とおき $\gamma(s) := \displaystyle\int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$ とおく
- <u>これが求めるものである．</u>

問題 3-1

問題

$J = (-1, 1)$ で定義された，弧長 s をパラメータにもつ空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ，捩率 τ が，定数 α に対して

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1-s^2}}$$

を満たしているとする．γ の単位速度ベクトルを $\boldsymbol{e}(s)$，主法線ベクトル，従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ とするとき，次のすべての条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の線形結合で表しなさい：

1. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ は s によらず一定,
2. $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ の成す角は s によらず一定,
3. $|\boldsymbol{v}| = 1$.

問題 3-1

条件を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を次のように書く：

$$\boldsymbol{v}(s) = A(s)\boldsymbol{e}(s) + B(s)\boldsymbol{n}(s) + C(s)\boldsymbol{b}(s).$$

1. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ は s によらず一定,
2. $\boldsymbol{v}$ と $\gamma'(s)$ の成す角は s によらず一定,
3. $|\boldsymbol{v}| = 1$.

問題 3-1

具体的な解？

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1-s^2}} = \alpha\kappa$$

問題 3-2

問題

弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における微分係数 $\gamma'(s_0)$, $\gamma''(s_0)$, $\gamma'''(s_0)$ をフルネ枠 $\boldsymbol{e}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, $\boldsymbol{b}(s_0)$ の線形結合で表しなさい.

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

ブーケの公式

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_0+\delta) &= \gamma(s_0) + \delta \boldsymbol{e}(s_0) + \frac{1}{2}\delta^2\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0) \\
&\quad + \frac{1}{6}\delta^3\bigl(-\kappa(s_0)^2\boldsymbol{e}(s_0) + \kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0)\bigr) \\
&\quad + o(\delta^3) \\
&= \gamma(s_0) + \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa_0(s_0)^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{e}(s_0) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{n}(s_0) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{b}(s_0)
\end{aligned}
$$