幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の局所的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/28

フルネ・セレの公式

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$: 空間曲線; s: 弧長;
- $\boldsymbol{e} := \gamma'$; $\kappa := |\gamma''|$;　　仮定：$\kappa > 0$
- $\boldsymbol{n} := \gamma''/\kappa$; $\boldsymbol{b} := \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$; $\tau := -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n}$.

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})\colon J \to \mathrm{SO}(3) \qquad \text{(フルネ枠)}$$

命題 (フルネ・セレの公式)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

捩率が消える曲線　(局所的な性質とはいえなさそう)

命題 (命題 4.2)

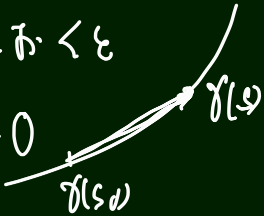
弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとする．さらに捩率 τ が恒等的に零ならば，$\mathbb{R}^3$ の平面 Π が存在して，γ の像は Π に含まれる．

$\tau = 0 \Rightarrow$ 平面曲線

- $\dfrac{db}{ds} = -\tau n = 0 \Rightarrow b$：一定 (定ベクトル)
- $f(s) := (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot b$ とおくと

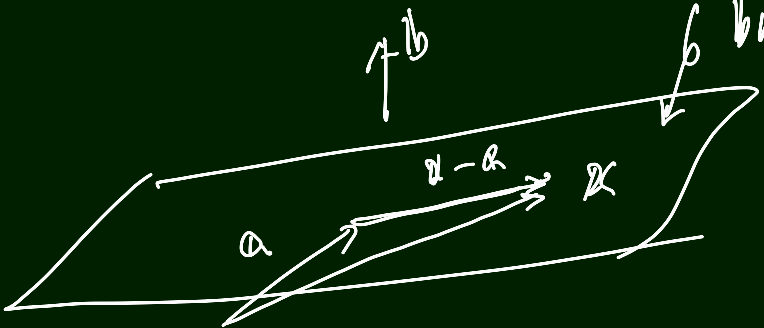
$$f'(s) = \gamma'(s) \cdot b = e \cdot b = 0$$

$$f(s_0) = 0 \quad \therefore f(s) = 0$$



$$(\gamma(s) - \underbrace{\gamma(s_0)}_{= a}) \cdot b = 0 \Rightarrow \gamma(s) \in \Pi$$

$$\{x ; (x - a) \cdot b = 0\} = \Pi$$



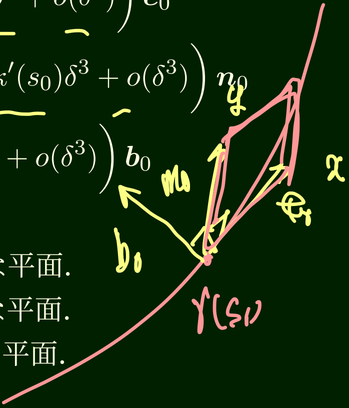
a を通り b に垂直な平面

ブーケの公式

Bouquet

- γ：空間曲線；$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$：フルネ枠. $\boldsymbol{b}$
- $\mathrm{P} := \gamma(s_0)$, $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}(s_0)$ ...

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_0+\delta) = \gamma(s_0) &+ \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa(s_0)^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{e}_0 \\
&+ \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{n}_0 \\
&+ \left(\frac{1}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{b}_0
\end{aligned}
$$



osculating plane

接触平面：P を通り，$\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{n}_0$ に平行な平面.

normal 法平面：P を通り，$\boldsymbol{n}_0$，$\boldsymbol{b}_0$ に平行な平面.

展直平面：P を通り，$\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{e}_0$ に平行な平面.

rectifying

問題 4-1

問題

正則にパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$ の曲率が $s_0 \in J$ の近くで零にならないとする．このとき，$s = s_0$ における γ の法平面への γ の正射影 σ は $s = s_0$ に特異点をもつことを示しなさい．さらに $\boxed{\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0)}$ が一次独立となるための条件を γ の曲率，捩率を用いて表しなさい．

$\sigma'(s_0) = 0$

接触平面への正射影

$\kappa = \kappa(s_0)$

$$x = \delta - \frac{1}{6}\kappa\delta^3 + o(\delta^3)$$

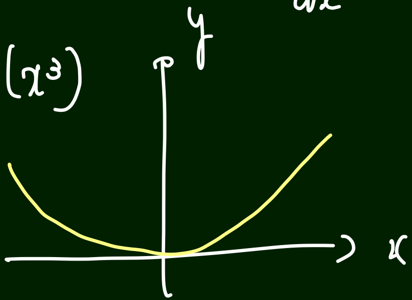
$\dot{x}\big|_{\delta=0} = 1 \neq 0$

$$y = \frac{1}{2}\kappa\underset{\delta(x)^2}{\delta^2} + o(\delta^3)$$

$\delta = \delta(x)$ とかける

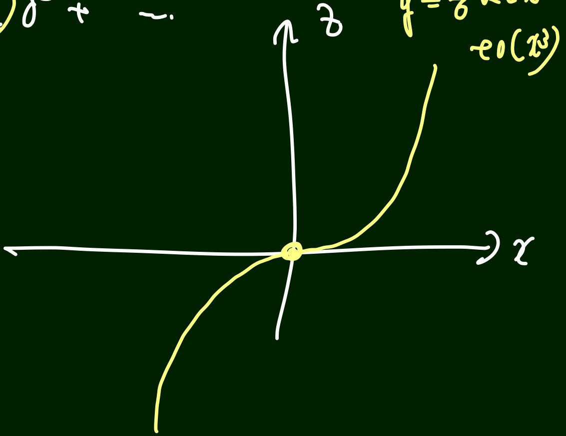
$\dfrac{d\delta}{dx}(0) = 1$

$$y = \frac{1}{2}\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\kappa}\, x^2 + o(x^3)$$



展直平面 τの影響

$$
\begin{cases}
x = s + \cdots \\
z = \dfrac{1}{6}\kappa\tau s^3 + \cdots
\end{cases}
\qquad \tau \neq 0
$$



問題 4-2 (局所?)

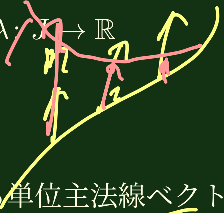
変換 transformation

問題

区間 $J \subset \mathbb{R}$ で曲率，捩率がともに零にならない，弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ として，C^∞-級関数 $\lambda\colon J \to \mathbb{R}$ ($\kappa\lambda \neq 1$) を用いて新しい空間曲線

弧長でない

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$$



を定義する．各 $s \in J$ において $\tilde{\gamma}$ の s における単位主法線ベクトルが $\boldsymbol{n}(s)$ と平行であるとき，

$\tilde{n} = \pm n$

1. $\lambda = \lambda(s)$ は定数であることを示しなさい．
2. ある定数 μ が存在して，γ の曲率 κ，捩率 τ は $\boxed{\lambda\kappa(s) + \mu\tau(s) = 1}$ を満たすことを示しなさい．

フルネ・セレの公式

問題 4-3

問題

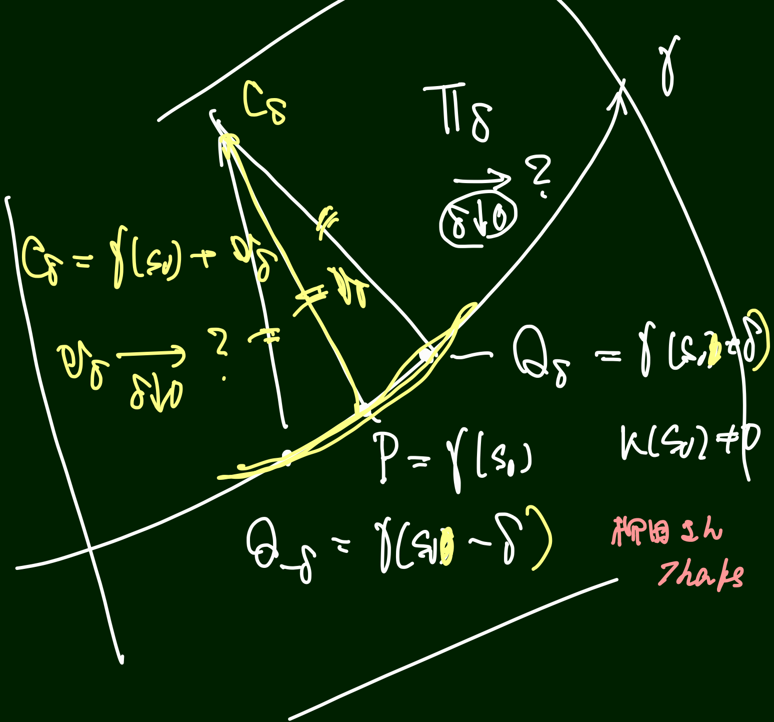
弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が零でないとする．正数 δ に対して次のようにおく：

$$\mathrm{O} := \gamma(s_0), \qquad \mathrm{Q}_\delta := \gamma(s_0 + \delta), \qquad \mathrm{Q}_{-\delta} := \gamma(s_0 - \delta).$$

1. δ が十分小なら O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ は同一直線上にないことを示せ．
2. そのような δ に対して 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π_δ は $\delta \searrow 0$ としたときどのような平面となるか．
3. 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る，平面 Π_δ 上の円の中心を C_δ として

$$\lim_{\delta \searrow 0} \overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}$$

を $\{\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0), \boldsymbol{b}(s_0)\}$ の線形結合で表せ．



γ
C_δ
$\Pi_\delta \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{} ?$
$C_\delta = \gamma(s_0) + v_\delta$
$v_\delta \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{} ?$
$Q_\delta = \gamma(s_0+\delta)$
$P = \gamma(s_0)$
$\kappa(s_0) \neq 0$
$Q_{-\delta} = \gamma(s_0-\delta)$
柳田さん
Thanks

本日の課題の提出締切は

2021 年 11 月 1 日（月曜日）07:00 JST