幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の局所的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/28 (2021/11/04 訂正)

フルネ・セレの公式

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$: 空間曲線; s: 弧長;
- $\boldsymbol{e} := \gamma'$; $\kappa := |\gamma''|$;　　仮定：$\kappa > 0$
- $\boldsymbol{n} := \gamma''/\kappa$; $\boldsymbol{b} := \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$; $\tau := -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n}$.

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})\colon J \to \mathrm{SO}(3) \qquad \text{(フルネ枠)}$$

命題 (フルネ・セレの公式)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

捩率が消える曲線

命題 (命題 4.2)

弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとする．さらに捩率 τ が恒等的に零ならば，$\mathbb{R}^3$ の平面 Π が存在して，γ の像は Π に含まれる．

ブーケの公式

- γ：空間曲線；$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$：フルネ枠.
- $\mathrm{P} := \gamma(s_0)$， $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}(s_0)$...

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_0+\delta) = \gamma(s_0) &+ \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa(s_0)^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{e}_0 \\
&+ \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{n}_0 \\
&+ \left(\frac{1}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)\delta^3 + o(\delta^3)\right)\boldsymbol{b}_0
\end{aligned}
$$

接触平面：P を通り，$\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{n}_0$ に平行な平面.
法平面：P を通り，$\boldsymbol{n}_0$，$\boldsymbol{b}_0$ に平行な平面.
展直平面：P を通り，$\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{e}_0$ に平行な平面.

問題 4-1

問題

正則にパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$ の曲率が $s_0 \in J$ の近くで零にならないとする．このとき，$s = s_0$ における γ の法平面への γ の正射影 σ は $s = s_0$ に特異点をもつことを示しなさい．さらに $\sigma''(s_0)$, $\sigma'''(s_0)$ が一次独立となるための条件を γ の曲率，捩率を用いて表しなさい．

問題 4-2

問題

区間 $J \subset \mathbb{R}$ で曲率，捩率がともに零にならない，弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を
$\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ として，C^∞-級関数 $\lambda\colon J \to \mathbb{R}$
（$\kappa\lambda \neq 1$）を用いて新しい空間曲線

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$$

を定義する．各 $s \in J$ において $\tilde{\gamma}$ の s における単位主法線ベクトルが $\boldsymbol{n}(s)$ と平行であるとき，

1. $\lambda = \lambda(s)$ は定数であることを示しなさい．
2. ある定数 μ が存在して，γ の曲率 κ，捩率 τ は $\lambda\kappa(s) + \mu\tau(s) = 1$ を満たすことを示しなさい．

問題 4-3

問題

弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が零でないとする．正数 δ に対して次のようにおく：

$$\mathrm{O} := \gamma(s_0), \qquad \mathrm{Q}_\delta := \gamma(s_0 + \delta), \qquad \mathrm{Q}_{-\delta} := \gamma(s_0 - \delta).$$

1. δ が十分小なら O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ は同一直線上にないことを示せ.
2. そのような δ に対して 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π_δ は $\delta \searrow 0$ としたときどのような平面となるか.
3. 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る，平面 Π_δ 上の円の中心を C_δ として

$$\lim_{\delta \searrow 0} \overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}$$

を $\{\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0), \boldsymbol{b}(s_0)\}$ の線形結合で表せ.