2021 年 10 月 28 日 (2021 年 11 月 04 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 4

■お知らせ

- 47 名から課題の提出がありました（10 月 25 日 07:00（JST））．1 ページの方 1 名，3 ページの方 1 名，当方で調整しました．
- 講義日程（内容）を修正しました．講義概要・第 1 回講義資料，第 1 回映写資料を修正していますのでご確認ください．

■前回の補足

- 「捩率 τ が恒等的に 0 であるならば平面曲線」ですか？ というご質問が複数．今回やります．
- 空間曲線のフルネ・セレの方程式を，平面曲線のように積分を用いて解けるかというご質問・試みが複数ありました．一般にはできないはずです．前回の問題 3-1 は具体的に解ける特殊な例です．今回少し解説します．
- 高次元のフルネ・セレの公式についての質問多数．4 次元の場合を調べた方もありました．注意 4.3 にまとめてみました．

■前回までの訂正

- 講義資料 3, 1 ページ，前回の補足の 3 番目の 2 行目：$\boldsymbol{n} = Re$ おけば $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n} = Re$ とおけば
- 講義資料 3, 1 ページ，前回までの訂正の 2 番目：$s \mapsto s(t) \Rightarrow s \mapsto t(s)$
- 講義資料 3, 3 ページ，例 3.3 の 5 行目：$y(t) = a\cos kt + (b/k)\sin kt \Rightarrow x(t) = a\cos kt + (b/k)\sin kt$
- 講義資料 3, 3 ページ，例 3.4 の下から 2 行目：なので s によらない定数だが $\Rightarrow$ なので $\mathcal{F}$ の連続性から s によらない定数だが
- 講義資料 3, 4 ページ，定理 3.6 の証明の 2 行目：曲率と主法線の $\Rightarrow$ κ と $\boldsymbol{n}$ の
- ~~講義資料 3, 4 ページ，例 3.8 の証明の 4 行目：~~$\cancel{\tau = b/c^2 \Rightarrow \tau = \operatorname{sgn}(a)b/c^2}$ とりけし
- 講義資料 3, 4 ページ，問題 3-1 の 2 行目：$\kappa(s)\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}} \Rightarrow \kappa(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}$
- 映写資料 C, 4 ページ：$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{b}(s) \Rightarrow \boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$
- 映写資料 C, 5 ページ：τ の定義式の右辺にマイナスをつける．

■授業に関する御意見

- 休憩中の録画を止めていただけると後で見返す時に楽なので，そうしていただけないでしょうか．　**山田のコメント：** それで一度再開を忘れたことがあって，それ以来とめないようにしています．再開忘れたら注意してくださるならやってもよいです．
- 上の質問枠で厳密でないもの（感覚や解釈に関するものなど）をしたとき，評価はどのようになるのですか？
  山田のコメント： それをどこまで言葉にできているかによる．
- 問題の解答欄が余った場合，その部分を質問欄として用いてもよろしいでしょうか？
  山田のコメント： そうしている人もいますが，できれば枠内におさめてほしい．
- 睡眠時間を犠牲にしてしまいましたが楽しかったです．　**山田のコメント：** ちゃんと寝てください．
- 選挙いきます！　**山田のコメント：** ぜひ．
- ノーベル賞の記念講演，解析学の演習と時間がかぶっておりました（かなしい）．　**山田のコメント：** 録画を公開予定．
- フルネ枠を考えると空間曲線をイメージしやすくなると感じた．　**山田のコメント：** そう？
- $\kappa \neq 0$ がキモい　**山田のコメント：** そうですか．
- 講義資料 3，授業に対するご意見の最初の項目に関する返信：1．$\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y})$ の記号がツライです．その意味では「所望のものではありません」2．● の 1 つめ，2 つめはカンタンなので $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y})$ のイミが分かれば「所望のものです」となりそうです．3．今回の講義資料 3 では，私が所望するようなものとしては定理 3.7 の直後の例 3.8 です．とても分かりやすかったです．
  山田のコメント：「ツライ」とは？ $\boldsymbol{f}$ の定義は (3.2) 式の上で明確にしている，どの部分がツライのか言語化してください．例は（スカラ値は細字としていますが）ほぼ (3.2) そのまま．例 3.8 は，誤りの指摘がありました．気付きました？
- 毎度のことですが，課題の解説の時間に学ぶことが多く，非常にありがたいです．また，現在解析学の講義でも似た内容を扱っているので，2 つの講義が互いに予習と復習の関係になっているみたいで面白いです！　**山田のコメント：** なるほど
- 楽しいので毎週の講義を楽しみにしています．　**山田のコメント：** どうも．

■質問と回答

質問 1： 平面曲線の基本定理の証明において，初期条件を $\mathcal{F}(s_0) = I$ としていいのはなぜですか．

お答え： していいでなく I とすれば条件を満たす曲線が得られる．これは $\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(2)$ によるが，初期条件 $\mathrm{SO}(2)$ の元なら何でもうまく行く．基本定理の積分を用いた証明（具体的な表示）で s_0 のとり方が任意なのと同様，適当に決め打ちした．

質問 2： 講議（原文ママ：講義のことか？）では曲率 0 のときは考えないことにしていましたが，たとえば $\kappa = 0 \Rightarrow \tau = 0$ のように約束しておけば直線などに関しては問題ないように感じたのですが，どのような不都合が生じるのでしょうか．/空間曲線の主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ を考える際に曲率 $\kappa = |\gamma''|$ に関して講義では $\kappa \neq 0$ の下で考えていますが，$\kappa = 0$ となるようなある $s_0 \in J$ についても $\kappa \neq 0$ の下での $\boldsymbol{n}(s)$ の極限としてより広い意味で定義づけることはできそうな気がしますが，より進んだ幾何学では実際に考えられているのでしょうか？ **お答え：**たとえば $\gamma(t) = {}^t(t, t, t^3)$ の曲率は $t = 0$ で 0 で，主法線ベクトルの右極限，左極限は一致しない．考える問題によっては曲率に正負の符号をつけて法線をうまく定義することもある．

質問 3： 空間曲線は曲率と捩率によって決まるので，逆に曲率と捩率が決まらないと空間曲線が決まらないと思うのですが，なぜ 2 つの量が必要なのでしょうか．1 つの量だけで空間曲線を決めることは不可能なのですか？

お答え： 空間曲線のパラメータ表示は 3 つの関数の組からなるが，パラメータ変換で移り合うものは同じ曲線と思うと，関数 1 つ分の自由度が減って，2 つの関数分の自由度をもつ，というのが大雑把な理由．

質問 4： 平面曲線の基本定理では曲率 κ と（2 次元）曲線が対応しました．空間曲線の基本定理では曲率 κ と捩率 γ（原文ママ：τ のことか？）で（3 次元）曲線が対応しました．平面から空間へ次元が 1 つ増えたから曲線を対応させる不変量が 1 つから 2 つに増えたのでしょうか．同様に 4 次元の曲線は 3 つの不変量で対応させることができるのでしょうか．

お答え： はい．言葉尻ですが「3 次元の曲線」という言い方はあまりしません．「3 次元空間内の曲線」というようにしましょう．曲線

自身は 1 次元多様体なので，3 次元の曲線というフレーズはナンセンスに感じられます．

質問 5： 空間曲線 γ に対し，その曲率と捩率が γ の（向きを保つとは限らない）等長変換を施しても変わらないことの必要十分条件は γ がある面に関して対称ということになりますか？ **お答え：**向きを反転する等長変換で κ は不変，τ は符号を変えるので不変になるためには τ が恒等的に 0．これは平面曲線であることと同値．

質問 6： 3 次元上の曲線をこのように考えられるなら，4 次元以上の曲線，また無限次元の曲線も同じように考えることができますか．

お答え： 無限次元空間の曲線を「同じように」考える，というときにどのような想像をしていますか？

質問 7： n 次元の場合には Ω が $n\times n$ 行列となるように作ったものが一意になりますか． **お答え：**ここでいう「もの」は何を指す？

質問 8： 1 階線型常微分方程式の解の存在の証明を次のように考えました．n 次元ベクトル値関数を未知関数とする線型常微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y})$ について，$f(t;\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}(t)$ となるような正方行列 A が存在 $\to$ A がジョルダン標準形 J になるように軸を回転させて，微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{z}}{dt}=J\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h}(t)$ に帰着できる $\to$ とくに n 個目の微分方程式が $z_n'(t)=\alpha z_n(t)+h_n(t)$ のような形でかけて z_n が解ける $\to$ $n-1$ 次元の場合に帰着 $\to$ 帰納的に 1 次元に帰着．以上の流れで問題はありますか？ またもっとエレガントな証明はありますか？ **お答え：**問題あります．一般に A は t に依存する（講義資料では明示していないが，フルネ・セレの公式ではそうなっているので，想像はできる）．したがって $A=P^{-1}JP$ と書くと P も J も一般に t に依存する．

質問 9： 例 3.3 の $y(t)=\frac{a}{a+(1-a)e^{-t}}$ は $a\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$ のとき $\mathbb{R}\setminus\{\log(1-1/a)\}$ で定義できます．M を定数として $y(t)=\frac{a}{a+(1-a)e^{-t}}(t\in\mathbb{R}\setminus\{\log(1-1/a)\})$, $y(t_0)=M$ ($t_0=\log(1-1/a)$) とすると $y'(t_0)=\infty$ となるが，$y(t_0)(1-y(t_0))=M(1-M)<\infty$ となり $y(t)$ は $y'=y(1-y)$，$y(0)=a$ ($a\in\mathbb{R}$) の解でない．よって $a\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$ のとき，ロジスティック方程式の解 $y(t)$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されることはないとしてあってますでしょうか． **お答え：**単に $t\to t_0$ で $y(t)$ が発散する．

質問 10： $|\boldsymbol{n}|=1$ より $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}'$ で，$\boldsymbol{e}=\kappa\boldsymbol{n}$ より $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}'$．$\therefore\boldsymbol{b}'\perp\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}'\perp\boldsymbol{n}'$．一方で $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}'$ より $\boldsymbol{b}'/\!/\boldsymbol{n}$ となる．$\therefore$ $\tau(s)=-\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}=-|\boldsymbol{b}'|$ となる．よって $\boldsymbol{b}'=-\tau\boldsymbol{n}$．これあってますか？（個人的には $\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$ に似ていてきれいと思いました） **お答え：**大体あってます．最後の部分 $\tau=-|\boldsymbol{b}'|$ の部分，捩率は正負の符号をとりうるので少しおかしい．

質問 11： 定理 3.6 の a_{11}，a_{31}，a_{21}，a_{23} は $\boldsymbol{e}'$ と $\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ の内積および $\boldsymbol{b}'$ と $\boldsymbol{n}$ の内積から求めればよいですか？

お答え： そうしてもよいですが，曲率の定義，捩率の定義，および Ω が交代行列であることからすぐにでませんか？

質問 12： 曲線の曲率半径は，ごく近い 2 点間の法線と元の 2 点の距離から求められる (!!)（高三の頃の自由研究で計算した．仮定は省略） **お答え：**そうですね．これに似たことを今回の問題で問うています．

質問 13： 平面曲線では曲率によって 2 次近似が出来，2 次近似の代表的な形として円（曲率半径）があった．空間曲線は 3 次であり（山田注：この意味がわからない）球による近似は出来ない．代わりにどんな図形を用いて近似するのか．/ 空間曲線でも曲率円（2 次や 3 次のオーダーで近似されるような曲線）のようなものを定義できるのでしょうか． **お答え：**今回少し扱う．

質問 14： 私が聞き逃していたら申し訳ないのですが，捩率が 0 のときは接触平面に接するということで合っていますか？ また捩率の正負についてですが，曲率（正のときは左曲がり，負のときは右曲がり）のように捩率の正負についても何か図形的な意味があるのでしょうか？ **お答え：**今回少しやります．右曲がり，左曲がりは平面曲線の場合ですね．

質問 15： $\kappa\neq 0$ な曲線を考えるとき $\gamma+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}$ は “回転軸” で，$\boldsymbol{b}$ がその軸の方向になっていそう．$\boldsymbol{n}$ を “曲線の回転軸に沿った自然な平行移動” により基準の $\boldsymbol{n}_0$ と比較することでどれだけ回転したかをはかれるだろうか？ そもそもこのような平行移動の概念はうまく定義できるだろうか？ **お答え：**前半はそんな感じ．もっとも $\boldsymbol{b}$ は一定でないので「回転軸」が変化する．

質問 16： フルネ・セレの公式から $\boldsymbol{e}(s)=\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{e}'(u)\,du=\int_{s_0}^{s}\kappa(u)\boldsymbol{n}(u)\,du=\int_{s_0}^{s}\left(-\frac{\kappa(u)}{\tau(u)}\right)\boldsymbol{b}'(u)\,du$ となるが，3-1 のように $\kappa(u)/\tau(u)$ が定数なら $\boldsymbol{e}(s)=C(\boldsymbol{b}(s)-\boldsymbol{b}(s_0))$ (C：定数）となる．$\boldsymbol{b}(s_0)=\boldsymbol{0}$ となる s_0 があるならこれは $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{b}(s)$ が平行となるということになるのではないかと思ったが，$\gamma''(s)\neq\boldsymbol{0}$ であることから必ず $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ が一次独立になるので $\boldsymbol{b}(s_0)=\boldsymbol{0}$ にはならないので，$\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{b}(s)$ が平行になることはない，と考えたが正しいでしょうか．

お答え： 正しいですが $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ が正規直交系をなすわけですから…ここまでしなくても．

質問 17： 問題 3-1 にて $\boldsymbol{b}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{n}(s)=-\alpha\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)=-\alpha\boldsymbol{e}'(s)$ より $\boldsymbol{b}(s)+\alpha\boldsymbol{e}(s)$ が定ベクトルになりました（つるまき線も同様）．このことに対応する，曲線の幾何学的性質はあるのでしょうか？ **お答え：**定ベクトルと一定の角をなして進む．

質問 18： 捩率の意味は $\boldsymbol{e}$ が微小時間で $\boldsymbol{b}$ 方向にどれだけ変化するかを表したものと考えてよいですか？

お答え： $\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}\cdot\boldsymbol{b}=0$ なので $\boldsymbol{e}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向への変化は（s の一次のオーダーでは）ありませんので，考えてよくないです．

質問 19：「二つの曲線 $\gamma(t)$ と $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ が同じ曲線である」と判別する基準は何ですか？

お答え： この講義では「パラメータ変換と向きを保つ等長変換で移り合う」

質問 20： (図省略，曲線が自己交叉している) このような点の速度はどのように理解すれば OK ですか？ **お答え：**異なる t_1, t_2 に対し $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ となるとき，これらの点を “別の点” とみなす（立体交叉のように）．そして各々の道の速度ベクトルを考える．

質問 21： 単位速度ベクトルと単位接線ベクトルは同じものでしょうか？（速度には向きがあるが…（以下略））

お答え： ここでは弧長パラメータで表示された曲線の速度ベクトル（自動的に大きさ 1）を単位接ベクトルと呼びました．向きに関する「後ろめたさ」があるので「単位接ベクトル $\boldsymbol{e}=\gamma'$」などと書くことが多いと思います．

質問 22： 代数学の「捩れ」加群は捩率と漢字は同じものを使っていますが，あまり関係ないというふうに思ったのですがどうでしょうか．もし関係があるなら教えてください． **お答え：**ない．

質問 23： 平面曲線の基本定理についてですが，γ は少なくとも C^2-級あればよいのでしょうか？ **お答え：**講義資料 3, 質問 12.

質問 24： ベクトル解析と微分幾何の違いはなんでしょうか？ **お答え：**微積分と解析学の違いのようなものでしょうか．

質問 25： $\mathbb{R}^3$ 内の $\boldsymbol{0}$ でない（山田注：後に「一次独立性」の仮定があるのでこれは不要ですね）3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられた際（これらは一次独立とする）右手系を成すか，左手系をなすかの，幾何学的実感を伴った判定方法はありますでしょうか．

お答え： $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ の正負．言い換えれば $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ の正負．同じことですが後者の方が「幾何学的」っぽいですね．

4 空間曲線の局所的性質

■フルネ枠 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の加速度ベクトルが零点をもたないとする．このとき，γ の**単位接ベクトル** $\boldsymbol{e}$，**単位主法線ベクトル** $\boldsymbol{n}$, **単位従法線ベクトル** $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s), \qquad \boldsymbol{n}(s) := \frac{\boldsymbol{e}'(s)}{|\boldsymbol{e}'(s)|} = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \qquad \boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

で定義すると，各 s に対して $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は右手系の正規直交系となる．これを γ の**フルネ枠**という．また $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ は SO(3) に値をもつ行列値関数だがこれも**フルネ枠**ということがある．

さらに関数 $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$, $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$ をそれぞれ γ の**曲率**，**捩率**という．点 $s = s_0$ において，

- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{e}(s_0)$，$\boldsymbol{n}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{b}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における**接触平面**という．
- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{n}(s_0)$，$\boldsymbol{b}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{e}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における**法平面**という．
- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{b}(s_0)$，$\boldsymbol{e}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{n}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における**展直平面**という．

■フルネ・セレの公式（復習）

定理 4.1 (フルネ・セレの公式)**.** 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の曲率 κ が零とならないとき

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right). \tag{4.1}$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ はフルネ枠で，τ は捩率である．

命題 4.2. 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとする．さらに捩率 τ が恒等的に零ならば，$\mathbb{R}^3$ の平面 Π が存在して，γ の像は Π に含まれる．

証明： フルネ・セレの公式から $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{0}$ なので，従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ は s によらない定ベクトルである．いま $s = s_0$ を一つ固定して $f(s) := \bigl(\gamma(s) - \gamma(s_0)\bigr) \cdot \boldsymbol{b}$ で実数値関数 f を定義すると，$\boldsymbol{b}$ が定ベクトルであることから $f'(s) = \gamma'(s) \cdot \boldsymbol{b} = 0$, すなわち f は定数であることがわかる．とくに $f(s_0) = 0$ だから $\bigl(\gamma(s) - \gamma(s_0)\bigr) \cdot \boldsymbol{b} = 0$ が成り立つ．すなわち $\gamma(s)$ は点 $\gamma(s_0)$ を通り $\boldsymbol{b}$ に垂直な平面上の点である．

注意 4.3 (高次元のフルネ枠)**.** 弧長によってパラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ に対して，次で定まるような枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を**フルネ枠**，関数 κ_1, ..., κ_{n-1} を第 1 曲率（曲率），..., 第 $n-1$ 曲率という：

(1) $\boldsymbol{e}_1 := \gamma'$, $\kappa_1 := |\boldsymbol{e}_1'|$．以下 $\kappa_1 > 0$ を仮定する．
(2) $\boldsymbol{e}_2 := \boldsymbol{e}_1'/\kappa_1$．とくに $\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{e}_1$ に直交する単位ベクトル．
(3) $j = 3, \dots, n-1$ に対して $\boldsymbol{v}_j := \boldsymbol{e}_{j-1}' + (\boldsymbol{e}_{j-2} \cdot \boldsymbol{e}_{j-1}')\boldsymbol{e}_{j-2}$，$\kappa_{j-1} = |\boldsymbol{v}_j|$ とおく．以下 $\kappa_{j-1} > 0$ を仮定して，$\boldsymbol{e}_j := \boldsymbol{v}_j/|\boldsymbol{v}_j|$ とおく．
(4) $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ に直交し，$\det(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ となる $\boldsymbol{e}_n$ をとり，$\kappa_{n-1} := -\boldsymbol{e}_n' \cdot \boldsymbol{e}_{n-1}$ とおく．

このとき $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_n)$ は SO(n) に値をとり, $\boldsymbol{e}_1' = \kappa_1\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_n' = -\kappa_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}$, $\boldsymbol{e}_j' = -\kappa_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + \kappa_j\boldsymbol{e}_{j+1}$ $(j = 2, \dots, n-1)$ が成り立つ．

2021 年 10 月 28 日 (2021 年 11 月 04 日訂正)

■ブーケの公式

定理 4.4 (ブーケの公式)**.** 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ が零点をもたないとき，

$$\gamma(s_0+\delta)=\gamma(s_0)+\left(\delta-\frac{1}{6}\kappa(s_0)^2\delta^3+o(\delta^3)\right)\boldsymbol{e}(s_0)+\left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)\delta^2+\frac{1}{6}\kappa'(s_0)\delta^3+o(\delta^3)\right)\boldsymbol{n}(s_0)$$
$$+\left(\frac{1}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)\delta^3+o(\delta^3)\right)\boldsymbol{b}(s_0)$$

が成り立つ．ただし $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ は γ のフルネ枠，τ は捩率である．また $o(\delta^3)$ は $\lim_{\delta\to 0}h(\delta)/\delta^3=0$ を満たす関数 h を表す（ランダウの小文字の o 記号）．

証明: 定義より $\gamma'(s_0)=\boldsymbol{e}(s_0),\gamma''(s_0)=\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0),\gamma'''(s_0)=\kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0)+\kappa(s_0)\bigl(-\kappa(s_0)\boldsymbol{e}(s_0)+\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0)\bigr)$ なので（問題 3-2），テイラーの定理より結論が得られる．

問題

4-1 弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon\mathbb{R}\supset J\to\mathbb{R}^3$ の曲率が $s_0\in J$ の近くで零にならないとする．このとき，$s=s_0$ における γ の法平面への γ の正射影 σ は $s=s_0$ に特異点をもつことを示しなさい．さらに $\sigma''(s_0)$, $\sigma'''(s_0)$ が一次独立となるための条件を γ の曲率，捩率を用いて表しなさい．

4-2 区間 $J\subset\mathbb{R}$ で曲率，捩率がともに零にならない，弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を $\mathcal{F}(s)=(\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s))$ として，零点をもたない C^∞-級関数 $\lambda\colon J\to\mathbb{R}$（$\kappa\lambda\neq 1$）を用いて新しい空間曲線

$$\tilde{\gamma}(s):=\gamma(s)+\lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$$

を定義する．各 $s\in J$ において $\tilde{\gamma}$ の s における単位主法線ベクトルが存在して $\boldsymbol{n}(s)$ と平行なとき，

(1) $\lambda=\lambda(s)$ は定数であることを示しなさい．

(2) ある定数 μ が存在して，γ の曲率 κ，捩率 τ は $\lambda\kappa(s)+\mu\tau(s)=1$ を満たすことを示しなさい．

（ヒント：s は $\tilde{\gamma}$ の弧長とは限らないことに注意．主法線ベクトルが平行，すなわち $\tilde{\boldsymbol{n}}(s)=\pm\boldsymbol{n}(s)$ ならば，これは γ の接ベクトル，従法線ベクトルおよび $\tilde{\gamma}$ の接ベクトル，従法線ベクトルと直交する.）

4-3 弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s=s_0$ における曲率が零でないとする．このとき，正の数 δ に対して

$$\mathrm{O}:=\gamma(s_0),\qquad \mathrm{Q}_\delta:=\gamma(s_0+\delta),\qquad \mathrm{Q}_{-\delta}:=\gamma(s_0-\delta)$$

とおく．

(1) δ が十分小さければ O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ は同一直線上にないことを示しなさい．

(2) (1) のような δ に対して 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π_δ は $\delta\searrow 0$ としたときどのような平面となるか.

(3) (2) の状況で，3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る，平面 Π_δ 上の円の中心を C_δ とするとき，

$$\lim_{\delta\searrow 0}\overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}$$

を s_0 におけるフルネ枠 $\{\boldsymbol{e}(s_0),\boldsymbol{n}(s_0),\boldsymbol{b}(s_0)\}$ の線形結合で表しなさい．（ヒント：$\boldsymbol{v}_1(\delta):=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_\delta}$, $\boldsymbol{v}_2(\delta):=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{-\delta}}$ とおいて $\overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}$ を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表す．C_δ が満たすべき条件は $|\overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}|=|\overrightarrow{\mathrm{Q}_\delta\mathrm{C}_\delta}|=|\overrightarrow{\mathrm{Q}_{-\delta}\mathrm{C}_\delta}|$.）