幾何学概論第一 (MTH.B211)

おしらせ

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/04

おしらせ

- 2021 年 11 月 01 日 07:00 に提出された課題をダウンロードしました．提出者 44 名でした．
- 答案および評点は T2SCHOLA よりフィードバックしております．ご確認ください．答案にかかれた文字は読解困難かもしれませんが，これは山田個人のメモです．講義資料にあるものをご利用ください．
- 次回 11 月 11 日に定期試験予告を行います．

メタ予告

意見・要望など

- 衆院選行きました．　山田のコメント：えらい．
- ユークリッド空間の定義が $\mathbb{R}^n$ に標準的な内積を考えたもの，と講義でありましたが，この定義におけるものとは他の言葉で表すと何になりますか．
山田のコメント：たしかに不適切な言い方ですね．「数空間 $\mathbb{R}^n$ と標準的内積 $\cdot$ の組 $(\mathbb{R}^n, \cdot)$」と言うべき．そしてそれを $\mathbb{R}^n$ と略記する．
$\mathbb{R}^n$
- 第 7 回の講義で成績評価の $x_{\max}$ は開示されますか？
山田のコメント：はい．

前回の補足—行列指数関数

n次

$$\exp A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

- 収束性？

• 各成分が収束

• 右辺の和は絶対収束

$A = (a_{ij})$: $n \times n$ matrix

対称、半正定値
(固有値≥ 0)

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| = ({}^tAA \text{ の最大固有値})^{1/2}$$

norm

$$\|A\|_2 := \sqrt{\operatorname{trace} {}^tAA} = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

$$\|A\|_\infty := \underline{\max |a_{ij}|}$$

$$\|A\|_\infty \leqq \sqrt{n}\, \|A\|$$

$$\|AB\| \leqq \|A\|\, \|B\|$$

$$|A^k \text{ の } ij \text{ 成分}| \leqq \|A^k\|_\infty \leqq \sqrt{n}\, \|A\|^k$$

優級数がある

質問から

Q: ブーケの公式では曲率関数の微分係数が使われていますが，曲線関数 γ が C^∞ であるとして，曲率関数が微分可能であるということはどのような事実から従うのでしょうか？

A: γ'' は C^∞-級で零でないので $|\gamma''|$ も C^∞.

κ'

$$0 < \kappa = |\gamma''| = \sqrt{\underbrace{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}_{C^\infty}} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\in C^\infty$

質問から

Q: ブーケの公式において δ^3 の項まで考えているのは，δ^3 までの項だと $\gamma(s_0+\delta)$ を $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ を用いて表すことができ，その 3 つを用いた表し方が最も簡単なやり方だからでしょうか．

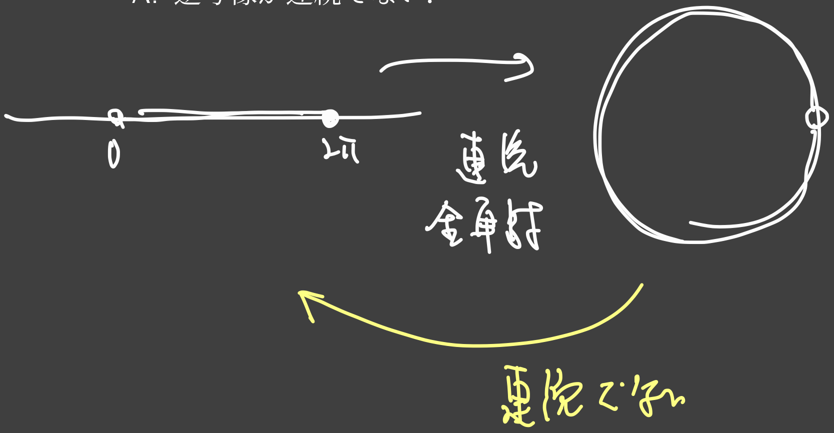
A: $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ の成分をテイラー展開したときの最初の項がでるまで．

$$\gamma(s_0+\delta) - \gamma(s_0) \approx$$
$$\left(\delta - \frac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + \cdots\right)\boldsymbol{e}_0 +$$
$$\left(\frac{1}{2}\kappa\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'\delta^3 + \cdots\right)\boldsymbol{n}_0 +$$
$$\left(\frac{1}{6}\kappa\tau\delta^3 + \cdots\right)\boldsymbol{b}_0 .$$

質問から

Q: 線と円は同相でないと聞いたことがあります．下の例（図がありますが，省略．$(0, 2\pi]$ という区間から円周への写像）

A: 逆写像が連続でない．



講義

この後，短い休憩をとり，2つの「講義」を行います.
質問などをチャットで行なう場合は，全員宛てにしてください

1　前回の復習・今回の準備

2　平面曲線の局所的性質