幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の局所的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/04

問題 4-1

問題

正則にパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$ の曲率が $s_0 \in J$ の近くで零にならないとする．このとき，$s = s_0$ における γ の法平面への γ の正射影 σ は $s = s_0$ に特異点をもつことを示しなさい．さらに $\boxed{\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0)}$ が一次独立となるための条件を γ の曲率，捩率を用いて表しなさい．

$\sigma' = 0$

$$\gamma(s_0+\delta) - \gamma(s_0) = \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)e_0$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\kappa\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'\delta^3 + o(\delta^3)\right)n_0$$
$$+ \left(\frac{1}{6}\kappa\tau\delta^3 + o(\delta^3)\right)b_0$$

$\kappa = \kappa(s_0)$

$\tau = \tau(s_0)$

$e_0 = e(s_0) \ldots$

$$\sigma(\underbrace{s_0+\delta}_{s}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\kappa\delta^2 + \frac{1}{6}\kappa'\delta^3 + o(\delta^3) \\ \frac{1}{6}\kappa\tau\delta^3 + o(\delta^3) \end{pmatrix}$$

$$\sigma'(s_0+\delta) = \begin{pmatrix} \kappa\delta + \frac{1}{2}\kappa'\delta^2 + o(\delta^2) \\ \frac{1}{2}\kappa\tau\delta^2 + o(\delta^2) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(s_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma'(s_0+\delta) = \begin{pmatrix} \kappa\delta + \frac{1}{2}\kappa'\delta^2 + o(\delta^2) \\ \frac{1}{2}\kappa\tau\delta^2 + o(\delta^2) \end{pmatrix}$$

$$\gamma''(s_0+\delta) = \begin{pmatrix} \kappa + \kappa'\delta + o(\delta) \\ \kappa\tau\delta + o(\delta^2) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \kappa &= \kappa(s_0) \\ \kappa' &= \kappa'(s_0) \end{aligned}$$

$$\gamma'''(s_0+\delta) = \begin{pmatrix} \kappa' + o(\delta) \\ \kappa\tau + o(\delta) \end{pmatrix}$$

$$\gamma''(s_0) = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma'''(s_0) = \begin{pmatrix} \kappa' \\ \kappa\tau \end{pmatrix}$$

$$\text{lin indep} \iff \underset{>0}{\kappa}\tau \neq 0 \iff \boxed{\tau = 0}$$

問題 4-2

問題

区間 $J \subset \mathbb{R}$ で曲率，捩率がともに零にならない，弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を
$\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ として，C^∞-級関数 $\lambda\colon J \to \mathbb{R}$
（$\kappa\lambda \neq 1$）を用いて新しい空間曲線

λ: 零にならない

(変換)

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$$

$\tilde{\gamma}$ の曲率 $\neq 0$

を定義する．各 $s \in J$ において $\tilde{\gamma}$ の s における単位主法線ベクトルが $\boldsymbol{n}(s)$ と平行であるとき，

$\tilde{n}(s) = \pm n(s)$

1. $\lambda = \lambda(s)$ は定数であることを示しなさい．
2. ある定数 μ が存在して，γ の曲率 κ，捩率 τ は $\lambda\kappa(s) + \mu\tau(s) = 1$ を満たすことを示しなさい．

Bertrand 曲線

訂正：(1) λ は零点をもたない．(2) $\tilde{\gamma}$ の曲率は零とならない．

$\tilde{\gamma} = \gamma + \lambda n$ $\quad$ $\tilde{\gamma}$ の Frenet 枠 $(\tilde{e}, \tilde{n}, \tilde{b})$, $\quad \tilde{n} = \pm n$

$\alpha \tilde{e} \quad \left(\alpha = \dfrac{d\tilde{s}}{ds} > 0\right)$ $\quad$ (弧長 $\tilde{s}$)

$$\alpha\tilde{e} = \tilde{\gamma}' = \gamma' + \lambda' n + \lambda n' \underset{\text{Frenet Serret}}{=} e + \lambda' n + \lambda(-\kappa e + \tau b)$$

$$= (1 - \kappa\lambda) e + \lambda' n + \lambda \tau b$$

(1) $\tilde{e} \perp \tilde{n} \, (= \pm n) \Rightarrow \tilde{\gamma}' \cdot n = 0 \Rightarrow \lambda' = 0$

$\Rightarrow \lambda$: const $\qquad \boxed{\lambda \neq 0}$

$$\alpha \tilde{e} = (1 - \kappa\lambda) e + \lambda \tau b$$

$$\underline{\alpha \tilde{e} = (1-\kappa\lambda) e + \lambda\tau b = \tilde{\gamma}'}$$

$$\tilde{\gamma}'' = (\alpha \tilde{e})' = \alpha' \tilde{e} + \alpha \tilde{e}' = \alpha' \tilde{e} + \alpha^2 \frac{d\tilde{e}}{d\tilde{s}}$$

$$= \alpha' \tilde{e} + \alpha^2 \tilde{\kappa} \tilde{n}$$

e, n, b

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}'' \perp \tilde{b} = \tilde{e} \times \tilde{n} = \pm e \times n$$

$e \times n = b$

$$/\!/ \quad \gamma' \times n =$$

$b \times n = -e$

$$\underline{(1-\kappa\lambda) b - \lambda\tau e} \quad ⓔ$$

$$\tilde{\gamma}'' = (1-\kappa\lambda)' e + (1-\kappa\lambda) e' + \lambda\tau' b + \lambda\tau b'$$

$$e' = \kappa n \qquad b' = -\tau n$$

$$\tilde{\gamma}'' \cdot ⓔ = -\cancel{\lambda}\tau (1-\kappa\lambda)' + \cancel{\lambda}\tau' (1-\kappa\lambda) = 0$$

$\lambda \neq 0$ $\quad \left(\frac{\tau}{1-\kappa\lambda}\right)' = 0$ const.

問題 4-3

問題

弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が零でないとする．正数 δ に対して次のようにおく：

$$\mathrm{O} := \gamma(s_0), \qquad \mathrm{Q}_\delta := \gamma(s_0 + \delta), \qquad \mathrm{Q}_{-\delta} := \gamma(s_0 - \delta).$$

1. δ が十分小なら O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ は同一直線上にないことを示せ.
2. そのような δ に対して 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π_δ は $\delta \searrow 0$ としたときどのような平面となるか.
3. 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る，平面 Π_δ 上の円の中心を C_δ として

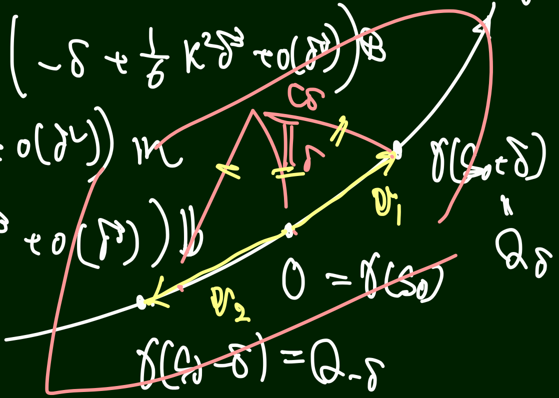
$$\lim_{\delta \searrow 0} \overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}$$

を $\{\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0), \boldsymbol{b}(s_0)\}$ の線形結合で表せ.

$$v_1 = \overrightarrow{OQ_\delta} = \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\mathbf{t} + \left(\frac{1}{2}\kappa\delta^2 + o(\delta^2)\right)\mathbf{n} + \left(\frac{1}{6}\kappa\tau\delta^3 + o(\delta^3)\right)\mathbf{b}$$

$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s_0)$ ⋮ const

$$v_2 = \overrightarrow{OQ_{-\delta}} = \left(-\delta + \frac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\mathbf{t} + \left(\frac{1}{2}\kappa\delta^2 + o(\delta^2)\right)\mathbf{n} + \left(-\frac{1}{6}\kappa\tau\delta^3 + o(\delta^3)\right)\mathbf{b}$$



$v_1 \times v_2 \neq 0 \Rightarrow$ lin indep

$$v_1 = \left(\delta - \frac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\mathbf{t} + \left(\frac{1}{2}\kappa\delta^2 + o(\delta^2)\right)\mathbf{n} + (o(\delta^3))\mathbf{b}$$

$$v_2 = -\left(\delta - \frac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)\mathbf{t} + \left(\frac{1}{2}\kappa\delta^2 + o(\delta^2)\right)\mathbf{n} + \cdots$$

$$v_1 \times v_2 = \kappa\delta^3(\mathbf{t}\times\mathbf{n}) + o(\delta^3)$$

$$= \delta^3\{\kappa\mathbf{b} + o(1)\}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{v_1\times v_2}{\delta^3}\right) = \kappa\mathbf{b} \neq 0 \quad \therefore\ v_1\times v_2$$

十分小さなδで 0でない

Π_δ = v_1 と v_2 に平行 = $v_1 \times v_2$ に直交

$\delta \downarrow 0$: $\mathbf{b}$ に直交

接触平面に収束

$$v_1 = \left(\delta - \tfrac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)e + \left(\tfrac{1}{2}\kappa\delta^2 + o(\delta^2)\right)n + \left(o(\delta^2)\right)b \quad \delta^3$$

$$v_2 = -\left(\delta - \tfrac{1}{6}\kappa^2\delta^3 + o(\delta^3)\right)e + \left(\tfrac{1}{2}\kappa\delta^2 + o(\delta^2)\right)n + \cdots$$

$$|v_1|^2 = \delta^2 - \tfrac{1}{3}\kappa^2\delta^4 + \tfrac{1}{4}\kappa^2\delta^4 + o(\delta^4)$$

$$v_1 \cdot v_2 = -\delta^2 + \tfrac{1}{3}\kappa^2\delta^4 + \tfrac{1}{4}\kappa^2\delta^4$$

$$|v_1|^2 = \delta^2 - \tfrac{1}{12}\delta^4\kappa^2 + o(\delta^4)$$

$$|v_2|^2 = \delta^2 - \tfrac{1}{12}\delta^4\kappa^2 + o(\delta^4)$$

$$v_1 \cdot v_2 = -\delta^2 + \tfrac{7}{12}\kappa^2\delta^4 + o(\delta^4)$$

$\frac{1}{\kappa}n$ 曲率円

$$\overrightarrow{OC_\delta} = A v_1 + B v_2, \quad \overrightarrow{Q_\delta C_\delta} = (A-1)v_1 + B v_2$$

① $|\overrightarrow{OC_\delta}|^2 = A^2|v_1|^2 + 2AB\, v_1\cdot v_2 + B^2|v_2|^2$

② $|\overrightarrow{Q_\delta C_\delta}|^2 = (A-1)^2|v_1|^2 + 2(A-1)B\, v_1\cdot v_2 + B^2|v_2|^2$

③ $|\overrightarrow{Q_{-\delta} C_\delta}|^2 = A^2|v_1|^2 + 2A(B-1)\, v_1\cdot v_2 + (B-1)^2|v_2|^2$

② = ③ $\Rightarrow A - B = o(\delta^2)$ ① = ② $A = \frac{1}{\kappa^2\delta^2} + o(1)$