幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の局所的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/04

問題 4-1

問題

正則にパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$ の曲率が $s_0 \in J$ の近くで零にならないとする．このとき，$s = s_0$ における γ の法平面への γ の正射影 σ は $s = s_0$ に特異点をもつことを示しなさい．さらに $\sigma''(s_0)$, $\sigma'''(s_0)$ が一次独立となるための条件を γ の曲率，捩率を用いて表しなさい．

問題 4-2

問題

区間 $J \subset \mathbb{R}$ で曲率，捩率がともに零にならない，弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ として，C^∞-級関数 $\lambda\colon J \to \mathbb{R}$ （$\kappa\lambda \neq 1$）を用いて新しい空間曲線

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$$

を定義する．各 $s \in J$ において $\tilde{\gamma}$ の s における単位主法線ベクトルが $\boldsymbol{n}(s)$ と平行であるとき，

1. $\lambda = \lambda(s)$ は定数であることを示しなさい．
2. ある定数 μ が存在して，γ の曲率 κ，捩率 τ は $\lambda\kappa(s) + \mu\tau(s) = 1$ を満たすことを示しなさい．

訂正：(1) λ は零点をもたない．(2) $\tilde{\gamma}$ の曲率は零とならない．

問題 4-3

問題

弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の $s=s_0$ における曲率が零でないとする．正数 δ に対して次のようにおく：

$$\mathrm{O} := \gamma(s_0), \qquad \mathrm{Q}_\delta := \gamma(s_0+\delta), \qquad \mathrm{Q}_{-\delta} := \gamma(s_0-\delta).$$

1. δ が十分小なら O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ は同一直線上にないことを示せ.
2. そのような δ に対して 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π_δ は $\delta \searrow 0$ としたときどのような平面となるか.
3. 3 点 O, Q_δ, $\mathrm{Q}_{-\delta}$ を通る，平面 Π_δ 上の円の中心を C_δ として

$$\lim_{\delta\searrow 0} \overrightarrow{\mathrm{OC}_\delta}$$

を $\{\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0), \boldsymbol{b}(s_0)\}$ の線形結合で表せ.