幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の局所的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/04

グラフ表示

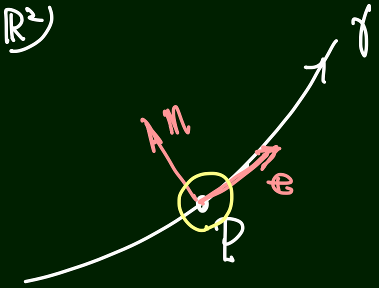
$\gamma\colon \mathbb{R}^2$ の正則曲線；$\mathrm{P}=\gamma(t_0)$；$\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n}\}$：Frenet 枠 弧長

補題

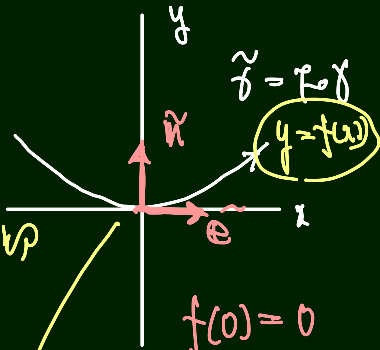
上の状況で $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ合同変換 F で，$\tilde\gamma=F\circ\gamma$ とおくと，$\tilde\gamma(t_0)={}^t(0,0)$，進行方向の単位接ベクトル，左向き単位法線ベクトルがそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{e}}(t_0)={}^t(1,0)$, $\tilde{\boldsymbol{n}}(t_0)={}^t(0,1)$ となるものが存在する．

さらにこのとき，0 を含む開区間 J'，t_0 を含む開区間 J とパラメータ変換 $\varphi\colon J'\ni x\mapsto t=\varphi(x)\in J$ および C^∞-級関数 $f\colon J'\to\mathbb{R}$ が存在して $\gamma\circ\varphi(x)=\bigl(x,f(x)\bigr)$ とかける．すなわち γ は C^∞-級関数 f のグラフで表示される．さらにこの関数 f は $f(0)=f'(0)=0$ を満たす．

$y=f(x)$ グラフ表示



$\xrightarrow[\text{回転と平行移動}]{T}$



$f(0) = 0$

$f'(0) = 0$

$x = x(t) = x$

$y = y(t) = y(t(x)) =: f(x)$

$y = f(x)$ とグラフ表示.

$\dot{x}(t_0) > 0 \Longrightarrow t = t(x)$ ととれる

$\dot{y}(t_0) = 0$

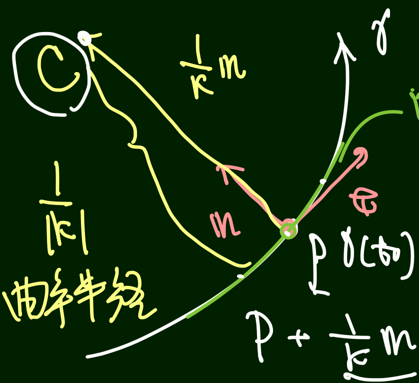
曲率円

γ: $\mathbb{R}^2$ の正則曲線；$\mathrm{P} = \gamma(t_0)$；$\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\}$：Frenet 枠；$\kappa$：曲率

定義

上の状況で，

- $\kappa(t_0) \neq 0$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$ となる点 C を中心とした半径 $1/|\kappa(t_0)|$ の円で P における進行方向が γ の進行方向と一致するような円 C_{P} を γ の t_0 における曲率円，その半径を曲率半径という．
- $\kappa(t_0) = 0$ のとき，γ の $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における接線で接点 P における進行方向が γ のそれと一致するものを t_0 における γ の曲率円 という．



κ: 曲率

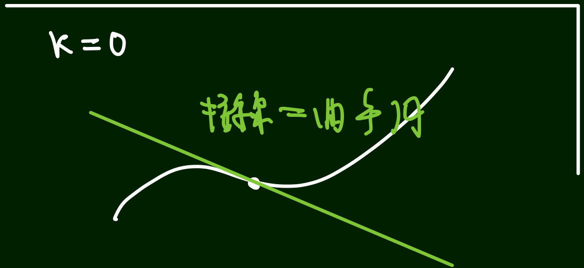
$e' = \kappa n$

C: 曲率中心

Cを中心とする半径 $\frac{1}{|\kappa|}$ の円

曲率円

γに接する円



曲線をよく近似する

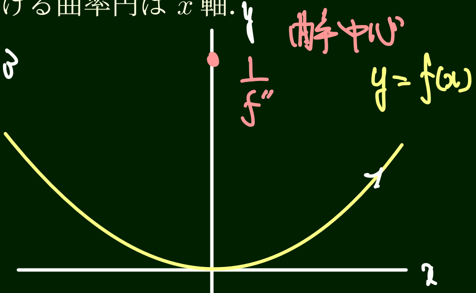
グラフ表示

関数 $f(x)$ のグラフ $\boxed{x \overset{t}{\mapsto} (x, f(x))}$ $\boxed{(f(0)=0,\ f'(0)=0)}$ の原点における曲率は $\kappa(0) = f''(0)$ で,

- $\kappa(0) \neq 0$ のとき，原点における曲率円は円 $x^2 + (y - 1/f''(0))^2 = 1/(f''(0))^2$.
- $\kappa(0) = 0$ のとき，原点における曲率円は x 軸.

$$\kappa = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cancel{f'} & f'' \end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{f'} \end{pmatrix} \right\|^3$$

$$\kappa(0) = f''(0)$$



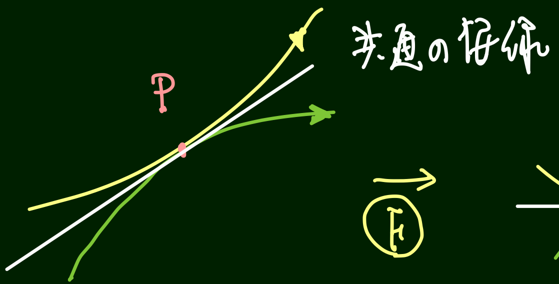
曲率円は曲線と2次の接触をする

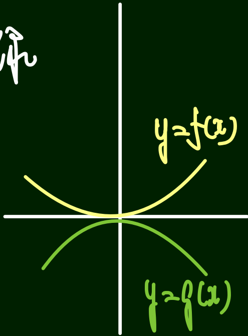
接触

- $\gamma(t)$, $\sigma(u)$：平面正則曲線
- $\gamma(t_0) = \sigma(u_0) =: \mathrm{P}$,

定義

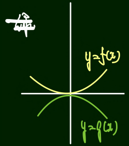
γ と σ が P で 1 次の接触をする $\Leftrightarrow$ 接線と進行方向を共有する.





高次の接触

- $\gamma(t)$, $\sigma(u)$：平面正則曲線
- $\gamma(t_0) = \sigma(u_0) =: \mathrm{P}$ で γ, σ は 1 次の接触



$\Rightarrow$ $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{O}$ となる向きを保つ等長変換により γ, σ はグラフ $x \mapsto (x, f(x))$, $x \mapsto (x, g(x))$ とかける．ただし $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$.

定義

γ, σ が $\mathrm{P} = \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で p 次の接触（$p = 2, 3, \ldots$）をする
$\Leftrightarrow$

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{d^k g}{dx^k}(0) \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

p次までのTaylor展開が一致する

②

曲率円と接触

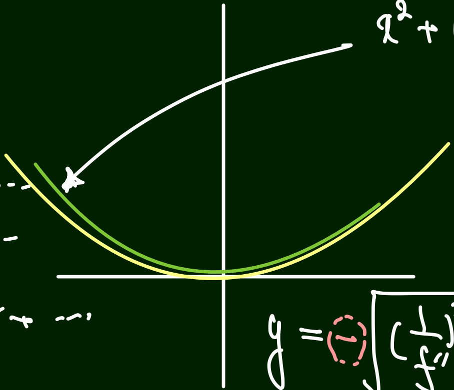
2次の接触

命題

平面曲線 $\gamma(t)$ の点 $\mathrm{P}=\gamma(t_0)$ における曲率円は P において γ と 2 次の接触をする.

$\kappa > 0$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{f''}\right)^2 = \left(\frac{1}{f''}\right)^2$$



$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \cdots \\ \quad \cdots \\ g(x) = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \cdots \end{cases}$$

$g(x)$

″

$$y = (-)\sqrt{\left(\frac{1}{f''}\right)^2 - x^2} + \frac{1}{f''}$$

座標変換

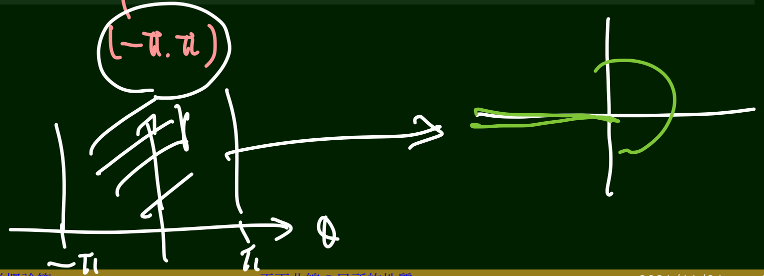
定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi\colon U \to V$ が微分同相写像または座標変換であるとは，Φ と Φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．

座標変換

例

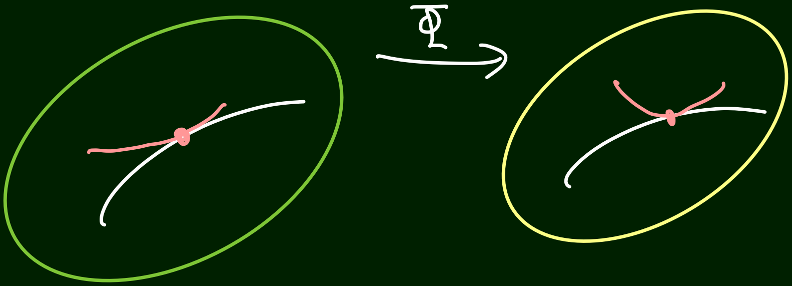
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto \sinh x$ は微分同相写像である. C^ω
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto x^3$ は微分同相写像でない. 逆が C^∞ でない
- $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ への写像 単射にならない
  ${}^t(r,\theta)\mapsto {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2$ は微分同相写像でない. 極座標
- $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,;\,x\le 0\}$ への写像
  ${}^t(r,\theta)\mapsto {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2$ は微分同相写像である.



接触の座標変換による不変性

事実

「二つの平面曲線が p 次の接触をする」という性質は座標変換によらない．すなわち，二つの平面曲線 $\gamma(t)$, $\sigma(u)$ が点 $\mathrm{P} := \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で p 次の接触をするならば，P の近傍 U で定義された微分同相写像 $\Phi\colon U \to \Phi(U) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\Phi\circ\gamma$, $\Phi\circ\sigma$ は $\Phi(\mathrm{P})$ で p 次の接触をする．



問題

弧長パラメータで表示された平面曲線 $\gamma(s)$ の曲率をを κ, $\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率円を C_{P} と書く.

1. s_0 における κ の微分係数 $\kappa'(s_0)$ が零でないとき, γ は s_0 において C_{P} を横切る, すなわち十分小さい正の数 ε で $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0)$ で $\gamma(s)$ は C_{P} の内側（外側）, $s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$ で $\gamma(s)$ は C_{P} の外側（内側）にあるようなものが存在することを示しなさい.
2. $\kappa'(s_0) = 0$ のとき, γ が s_0 において C_{P} を横切る例, 横切らないような例を 1 つずつ挙げなさい.

グラフ概形でよい、

問題 5-2

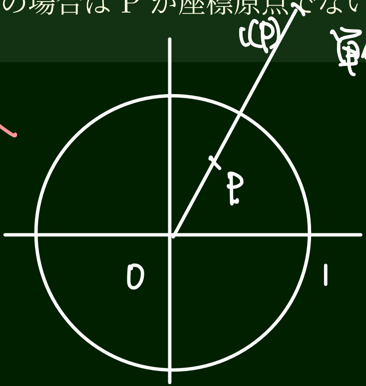
$\Leftrightarrow \kappa' = 0$

問題

正則曲線 γ の点 $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円を C_{P} とする．「C_{P} と γ が P において 3 次以上の接触をする」という条件は，$\mathbb{R}^2$ の変換 $\delta_k\colon \boldsymbol{x} \mapsto k\boldsymbol{x}$, $\iota\colon \boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ によって保たれることを示しなさい．ただし k は零でない定数，ι の場合は P が座標原点でないものとする．

相似拡大

単位円に関する反転



$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{O}\iota(\mathrm{P}) = 1$

問題 5-3

option

問題

正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ かつ $\det(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)) \neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい.

本日の課題の提出締切は

2021年11月8日（月曜日）07:00 JST