2021 年 11 月 04 日 (2021 年 11 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 5

- 次回 11 月 11 日に定期試験の予告をします．

■前回の補足

- 問題 4-2 の仮定を追加：(1) λ が零点を持たないこと，(2) $\tilde{\gamma}$ の曲率が消えないこと．
- 講義資料 4, 3 ページ，命題 4.2 の 2 行目：「γ の像」は「曲線 γ ではないか」というご指摘がありましたが「像」で正しいです．
- 映写資料 B, 5 ページ：$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ の “=” は “:=” ではないか，というご指摘がありましたが，$\mathcal{F}$ はすぐ上の行で定義されているので「左辺を右辺にて定義する」という意味では間違い．むしろこの式は $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ の定義式．
- 行列指数関数 $\exp A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$ の収束性についてのご質問を複数いただきました．(1) 定義式右辺の収束の意味は，各成分が収束すること．(2) 任意の正方行列 A に対して右辺は絶対収束する．証明は例えば常微分方程式の入門レベルの本にあるはず．

■前回までの訂正

- 講義資料 4, 1 ページ，前回までの訂正の 6 項目：取り消し
- 講義資料 4, 1 ページ，授業に関するご意見の最後から 2 番目の山田のコメント：なるほど.（ピリオド追加）
- 講義資料 4, 3 ページ，命題 4.2 の証明 2 行目：$\boldsymbol{b}$ が定数 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b}$ が定ベクトル
- 講義資料 4, 3 ページ，下から 2 行目：$\boldsymbol{e}_n = -\kappa_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} \Rightarrow \boldsymbol{e}'_n = -\kappa_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}$
- 講義資料 4, 4 ページ，定理 4.4 の 2 行目：$\frac{1}{6}\kappa_0(s_0)^2\delta^3 \Rightarrow \frac{1}{6}\kappa(s_0)^2\delta^3$（映写資料 C の対応箇所も）
- 講義資料 4, 4 ページ，定理 4.4 の 4 行目：$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}) \Rightarrow (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$
- 講義資料 4, 4 ページ，問題 4-1 の 1 行目：正則に $\Rightarrow$ 弧長で
- 講義資料 4, 4 ページ，問題 4-2 の 2 行目：C^∞-級関数 $\lambda \Rightarrow$ 零点をもたない C^∞-級関数 λ
- 講義資料 4, 4 ページ，問題 4-2 の 4 行目：単位主法線ベクトルが $\boldsymbol{n}(s)$ と平行 $\Rightarrow$ 単位主法線ベクトルが存在して $\boldsymbol{n}(s)$ と平行
- 黒板 B, 8 ページ目：展直平面への射影のグラフ $y = \frac{1}{6}\kappa\tau^3 + o(x^3) \Rightarrow z = \frac{1}{6}\kappa\tau^3 + o(x^3)$

■授業に関する御意見

- ユークリッド空間の定義が $\mathbb{R}^n$ に標準的な内積を考えたもの，と講義でありましたが，この定義におけるものとは他の言葉で表すと何になりますか． **山田のコメント：** たしかに不適切な言い方ですね．「数空間 $\mathbb{R}^n$ と標準的内積 $\cdot$ の組 $(\mathbb{R}^n, \cdot)$」と言うべき．そしてそれを $\mathbb{R}^n$ と略記する．
- 今回の bb が配布されていなかったので配って頂きたいです． **山田のコメント：** 手違いでした．ご迷惑をおかけしました．
- 今回は課題が非常に難しく感じました．次の講義での解説で理解できるように頑張ります．また，今回，回答らんが少し狭く感じたので，3 ページで出せるようになるとありがたいです（当然，全員が 3 ページで出さなくてはいけなくなってしまいますが） **山田のコメント：** できれば「下書き」してから整理してほしい．
- 先生は講義資料を作成するのにどのくらい時間をかけているのでしょうか． **山田のコメント：** 資料後半 1.5 時間，採点 1 時間，資料前半 1.5 時間．
- 第 7 回の講義で成績評価の x_{max} は開示されますか？ **山田のコメント：** はい．
- 曲率円のように捩率のもつ図形的意味は何かないのでしょうか． **山田のコメント：** ブーケの公式をみると感じるものはありませんか？
- 展直という単語，はじめてきいたかもしれません． **山田のコメント：** そうですよね．
- パラメータが弧長でないときに，フルネ・セレと同様のことができるのかどうかが分からなかった． **山田のコメント：** そう？
- 「曲線と曲面 —微分幾何的アプローチ」に記載されている主張は課題解答に用いてもよろしいですか． **山田のコメント：** どういう主張を使ったか，読者が理解できるように書いていただければ結構です．
- 4-2 がよく分かりませんでした． **山田のコメント：** なるほど．
- 「ツライとは？」という質問に対して，1．計算がヘタ，2．ブーケの公式が使えない，3．理解していない，4．1 ～ 3 のどれがあるいはどの組み合わせが原因か不明だが問題がとけない． **山田のコメント：** たしかこちらがお聞きしたのは “$\boldsymbol{f}$” がツライです” のツライの意味なのでちょっと違いそうです．
- 3-1，3-2 の解説は 1-2 以来の感動でした．とても真似できそうにありませんが... **山田のコメント：** そう?
- 衆院選行きました．/選挙，投票しました． / 投票に行きました．自分の投票した候補者が勝利するとなんだか嬉しいものです． **山田のコメント：** えらい．

■質問と回答

質問 1： 捩率の定義はなぜ $\tau(s) = \boldsymbol{b}(s) \cdot \boldsymbol{n}'(s)$ ではなく $\tau(s) = -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$ なのでしょうか．($(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}'$ より $\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}'$） **お答え：**同値なのでどちらでもよいです．

質問 2： 空間曲線は曲率と捩率によって一意に定められますが，曲面を一意に定めるには少なくとも 3 つの関数が必要となるのでしょうか． **お答え：**4Q に説明する（曲面論の基本定理）．たしかに実質 3 つ．

質問 3： 接触平面，法平面，展直平面について，それぞれ $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{n}_0$ に垂直な平面と考えたほうが日本語の意味として理解しやすかったのですが，このように考えてよいですか？ **お答え：**同値なのでよいのでは？

質問 4： 展直という言葉を初めて聞きました．「従接触平面」のような言葉を作らずに「展直」を当てた理由をご存知でしたら教えて頂きたいです． **お答え：**知りません．Rectifying plane の訳語です．

質問 5： 法平面への γ の正射影が $s = s_0$ に特異点をもつということは，法平面から見た時に単位接ベクトルが 0 になるから $s = s_0$ で止まっているように見えるということか． **お答え：**接ベクトル（単位ではない）が $\mathbf{0}$ になる，というのが特異点の定義．

質問 6： 高次元な図形を適切な空間に射影してその性質を調べるといった研究手法はありますか？ **お答え：**はい．

質問 7： 今回の 4-1 等で，正則曲線をより次元の低い空間に射影する事で特異点を持つ曲線へと変換した．では逆に特異点をもつ曲線に対して，射影してその曲線になる正則曲線を与えれば特異点付近での挙動をより深く捉えられるのではないかと考えた．

お答え： 講義資料 3, 質問 1.

質問 8： 命題 4.2 で $f(s) = (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \boldsymbol{b}$ とおく発想について，結論から逆算すると $\gamma(s)$ が平面のときに 2 次の場合（山田注：2 次元の場合，の意味か？）と同様に「$\gamma(s)$ は $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{n}$ がはる平面内の曲線」となることが予想でき，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$ と $\gamma(s) - \gamma(s_0)$ が垂直となることが示せそうだから，という理由で合ってますか． **お答え：**ひとそれぞれですが，そうですね．

質問 9： 講義では触れていませんでしたが，講義資料の注意 4.3 について質問です．この定義に従うと $n = 3$ の場合は今までの「捩

率」が「第 2 曲率」に相当することになると思います．$n \geqq 4$ の場合「捩率」は「第 2 曲率」になるのでしょうか？ それとも「第 $n-1$ 曲率」になるのでしょうか？ もしくは「捩率」という言葉ではもう表現しないのでしょうか？

お答え： 高次元の場合，あまり「捩率」と言わないような気がします．捩率に相当するものは κ_2 か κ_{n-1} か，どちらがお好みですか．

質問 10： 教科書の p. 57 でブーケの公式が出てきていますが，ランダウの記号がベクトルに括られていない項として出てきているので違和感がありました．$o(s^3)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数を表していると思うので，この書き方は正しくないのではないでしょうか．あるいは慣例のようなものでしょうか． **お答え：**$\mathbb{R}$ 上の関数で値が $\mathbb{R}^3$．意味は明確と思います．

質問 11： ブーケの公式では曲率関数の微分係数が使われていますが，曲線関数 γ が C^∞ であるとして，曲率関数が微分可能であるということはどのような事実から従うのでしょうか？ **お答え：**γ'' は C^∞-級で零でないので $|\gamma''|$ も C^∞.

質問 12： ブーケの公式では曲率が零点をもたないときと書かれているが，この曲率はこの公式のどこに影響を与えているのか？ この条件がなくても成立しますか？ **お答え：**曲率が零のとき $\boldsymbol{n}$ や τ が定義できますか？

質問 13： δ^4 項の定数倍までを考えるような，より精度の高いブーケの公式を考える際も講義資料の証明と同様に γ の n 回微分を考えてテイラーの定理を行えば良いと思うのですが，$\gamma''''(s)$ を求めるのが大変でした．3 回微分まで考えるのは $\boldsymbol{b}$ 項のオーダーと定数倍が分かるからだと思いますが，実用上 4 回微分はどのような（＊）（山田注：判読不能）に考えますか．

お答え： 山田は使ったことがないですが，$\boldsymbol{b}$ 方向の 3 次の項が消えてしまうと 4 次の項を見たくなります．

質問 14： ブーケの公式において δ^3 の項まで考えているのは，δ^3 までの項だと $\gamma(s_0+\delta)$ を $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ を用いて表すことができ，その 3 つを用いた表し方が最も簡単なやり方だからでしょうか． **お答え：**いいえ．高次の項も $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ で表せます．

質問 15： γ の 4 階微分までも 3 階までと同様に計算できると思うのですが，ブーケの公式が 2 次までや 4 次までのテーラー展開ではなく 3 次までのテーラー展開なのは何故ですか． **お答え：**$\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ の成分をテイラー展開したときの最初の項がでるまで．

質問 16： ブーケの公式が 3 次までの展開なのは実用上これで十分だからなのでしょうか？ また，これは空間曲線が 3 次元内の曲線であることに関係したりしますか． **お答え：**後半：はい．注意 4.3（高次元フルネ枠）についてブーケの公式を作ってみよう．

質問 17： ブーケの公式の意味合いとしては，$s=s_0$ での曲率，捩率，$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ がわかれば曲線が求められるという意味合いであってますか？ **お答え：**あってません．テイラー展開の 3 次の項までがわかる．$s=s_0$ における曲率に加えて曲率の微分係数も必要．

質問 18： ブーケの公式をみると，空間曲線の $s=s_0$ における二次近似曲線は接触平面上の平面曲線として $\gamma(s_0)+(s-s_0)\boldsymbol{e}(s_0)+\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s-s_0)^2\boldsymbol{n}(s_0)$ のように表せそうです． **お答え：**はい．

質問 19： 問 4-1 より法平面への正射影は特異点を持ちますが，それ以外の接触平面などへの正射影ではどうなるのでしょうか．

お答え： すぐにできるのでやってみればよい．

質問 20： 問題 4-1 の解説中に，接触平面への正射影を考えたと思うのですが，その時 $x=\delta-\frac{1}{6}\kappa_0^2\delta^3+o(\delta^3)$, $y=\frac{1}{2}\kappa_0\delta^2+o(\delta^2)$ として $x'(0)\neq 0$ より $\delta=\delta(x)$ と表されることから $y=\frac{1}{2}\kappa_0\delta(x)^2+o(\delta^2)$ となるのはわかるのですが，ここからなぜ $y=\frac{1}{2}\kappa_0 x^2$ がでるのですか？ **お答え：**結論は $y=\frac{1}{2}\kappa_0x^2+o(x^2)$．$\delta(0)=0$, $\dot\delta(0)=1$ から $\delta(x)=x+o(x)$ となるので．

質問 21： 4-2 の $d^2s/dt^2=0$ のときの考察はしっかりと必要十分に反例を構成できているのでしょうか．

お答え： $d^2s/dt^2=0$ の場合を考察して反例として $\lambda=0$ のケースを作っておられるのですね．反例としては正しいです（問題の仮定が不足していました）．もちろん $d^2s/dt^2=0$ の場合でも結論が成り立つこともあります．

質問 22： 曲率テンソルとか捩率テンソルとかきいたことがあるのですが，それらは空間全体で定義されたテンソル場だから，曲線の話と一見して関係があるようには思えないのですが，どういう関係があるのでしょうか． **お答え：**ここでは特に関係ないと考えてください．リーマン多様体や線形接続の不変量ですが，4Q に少しだけ言及するかもしれません（少しだけです）．

質問 23： 命題 4.2 に関連して “$\mathbb{R}^n$ 上の曲線 γ の第 k 曲率から第 $n-1$ 曲率までが全て恒等的に零ならば $\mathbb{R}^n$ の k 次元部分空間 V が存在して $\mathrm{im}\gamma\subset V$ となる” としてよいでしょうか？ 曲線の自由度に基づき予想しました． **お答え：**よくないです．第 k 曲率が 0 のとき第 $k+1$ 曲率は定義されません．このとき何が起きているか考えてみよう．

質問 24：「SO(3) の Lie 環が交代行列全体」とのことなので Lie 環の定義を調べてその証明を考えてみました．$\mathcal{F}(s)\in\mathrm{SO}(3)$ の各成分はなめらかな関数とし，$\mathcal{F}(0)=I$ とする $\to$ I における接ベクトル $\mathcal{F}'(0)=A$ ついて，$\frac{d}{ds}(\mathcal{F}(s)^tF(s))\Big|_{s=0}=\mathcal{F}(0)^t\mathcal{F}'(0)+\mathcal{F}'(0)^t\mathcal{F}(0)=A+{}^tA=O$ $\to$ SO(3) の Lie 環の元は交代行列．逆に任意の交代行列 A に対応する $\mathcal{F}(s)\in\mathrm{SO}(3)$ が存在（x, y, z 軸周りの回転行列に対応する関数の積によって $\mathcal{F}(s)$ を定める）．以上の流れで問題ありますか．

お答え： 括弧内の部分，具体的にかけますか？（一般的な教科書では，次元を比較して逆の包含関係を示している．）

質問 25： まだ勉強していないですが，線と丸は同相でないと聞いたことがあります．下の例（図がありますが，省略．$(0,2\pi]$ という区間から円周への写像）は一見同相であるように見えますが（略） **お答え：**逆写像が連続でない．

質問 26： $\frac{d^2\mathcal{F}}{ds^2}$ の値について：(中略) $\frac{d^2\mathcal{F}}{ds^2}=\mathcal{F}(\Omega^2+\Omega')$． **お答え：**これは何を示したことになるのでしょう．

質問 27： 平面曲線では与えられた曲率 $\kappa(s)$ を用いた具体的曲線表示（中略）がありました．これは素朴な発想として $\dot\gamma(s)=\boldsymbol{e}(s)$ をみたす $\boldsymbol{e}(s)$ を $\boldsymbol{e}(s)=\binom{\cos\theta(s)}{\sin\theta(s)}$ とおいて導出したのだが，では $\boldsymbol{e}(s)={}^t(\sin\theta(s)\cos\varphi(s),\sin\theta(s)\sin\varphi(s),\cos\theta(s))$ などとして曲率 κ, 捩率 τ を持つ空間曲線の具体的表示は得られないのでしょうか． **お答え：**素朴にやってどこまでできますか？

質問 28： 講義資料の「命題（フルネ・セレの公式）」というところについてですが $\Omega(s)$ をフルネ枠 $\mathcal{F}$ を微分することにより求めると $\Omega(s)$ が交代行列となっているのですが，これには特に意味はありませんか？ それとも何か図形的意味等があるのでしょうか．

お答え： 講義で口走りましたが SO(3) のリー環が 3 次交代行列全体．

質問 29： 過去の講義で軽く触れていらっしゃったかもしれませんが n 次元 ($n\in\mathbb{N}$, $n\geqq 4$) におけるフルネ枠（名前は違うかもしれませんが）もあるのでしょうか？ **お答え：**軽くもなにも講義資料 4 にはっきり書いてある．

質問 30： $\lim_{\delta\to 0}\frac{h(\delta)}{\delta^3}\neq 0$ となるような空間曲線も存在するのでしょうか？ ブーケの公式の $\boldsymbol{e}(s_0)$, $\boldsymbol{n}(s_0)$, $\boldsymbol{b}(s_0)$ の各項の係数も変わると思うのですが，$\lim_{\delta\to 0}\frac{h(\delta)}{\delta^3}\neq 0$ の場合は特殊な空間曲線を表すのでしょうか？ **お答え：**$h(\delta)$ ってなんですか？

5 平面曲線の局所的性質

■平面曲線（復習） 弧長によってパラメータ付けられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R}\supset J\to\mathbb{R}^2$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s):=\gamma'(s)$ に対して，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ をとると，フルネ枠 $\mathcal{F}:=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})\colon J\to \mathrm{SO}(2)$ が得られる．$\mathcal{F}'=\mathcal{F}\Omega$（$\Omega:=\begin{pmatrix}0&-\kappa\\ \kappa&0\end{pmatrix}$）を満たす関数 κ を γ の**曲率**とよぶ．以下，曲線はすべて C^∞-級とする．

■グラフ表示 正則にパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(t)$ 上の点 $\mathrm{P}=\gamma(t_0)$ を固定し，$\boldsymbol{e}(t_0)$, $\boldsymbol{n}(t_0)$ をそれぞれ点 P における進行方向の単位接ベクトル，左向き単位法線ベクトルとする．

補題 5.1. 上の状況で $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ合同変換 F で，$\tilde\gamma:=F\circ\gamma$ で $\tilde\gamma(t_0)={}^t(0,0)$，進行方向の単位接ベクトル，左向き単位法線ベクトルがそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{e}}(t_0)={}^t(1,0)$, $\tilde{\boldsymbol{n}}(t_0)={}^t(0,1)$ を満たすものが存在する．

証明： $A:=(\boldsymbol{e}(t_0),\boldsymbol{n}(t_0))$, $\boldsymbol{a}:=\gamma(t_0)$ とおき，$F(\boldsymbol{x})=A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ とおけばこれが求めるものである．

補題 5.2. 正則平面曲線 $\gamma(t)$ とその進行方向の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が

$$\gamma(t_0)=\mathrm{O}={}^t(0,0),\qquad \boldsymbol{e}(t_0)={}^t(1,0),\qquad \boldsymbol{n}(t_0)={}^t(0,1) \tag{5.1}$$

を満たしているとき，0 を含む開区間 J'，t_0 を含む開区間 J とパラメータ変換 $\varphi\colon J'\ni x\mapsto t=\varphi(x)\in J$ および C^∞-級関数 $f\colon J'\to\mathbb{R}$ が存在して $\gamma\circ\varphi(x)={}^t(x,f(x))$ とかける．すなわち γ は C^∞-級関数 f のグラフで表示される．さらにこの関数 f は $f(0)=f'(0)=0$ を満たす．

証明： $\gamma(t)={}^t(x(t),y(t))$ とおくと，C^∞-級関数 x は $x(t_0)=0$, $\dot x(t_0)>0$ を満たすので，t_0 を含む開区間 J で $\dot x>0$，x の像 J' は原点を含む開区間となる．逆関数定理から $\varphi\colon x\mapsto t=\varphi(x)$ も C^∞-級で $\gamma\circ\varphi(x)=(x\circ\varphi(x),y\circ\varphi(x))=(x,f(x))$．後半は (5.1) から分かる．

■曲率円 正則平面曲線 $\gamma(t)$ の $\mathrm{P}:=\gamma(t_0)$ における曲率を $\kappa(t_0)$，左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(t_0)$ と書く．

定義 5.3. 上の状況で，

- $\kappa(t_0)\neq 0$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$ となる点 C を中心とした半径 $1/|\kappa(t_0)|$ の円で P における進行方向が γ と一致するような円 C_{P} を γ の $\mathrm{P}=\gamma(t_0)$ における**曲率円**，その半径を**曲率半径**という．
- $\kappa(t_0)=0$ のとき，γ の $\mathrm{P}=\gamma(t_0)$ における接線で接点 P における進行方向が γ のそれと一致するものを t_0 における γ の**曲率円** という．

例 5.4. 曲線が補題 5.2 のようにグラフ表示されているとき，原点における曲率は $\kappa(0)=f''(0)$ で，

- $\kappa(0)\neq 0$ のとき，原点における曲率円は円 $x^2+(y-1/f''(0))^2=1/(f''(0))^2$.
- $\kappa(0)=0$ のとき，原点における曲率円は x 軸.

ただし，これらの曲率円の進行方向は原点において「右向き」とする．

■接触 二つの正則平面曲線 $\gamma(t)$, $\sigma(u)$ が $\gamma(t_0)=\sigma(u_0)=:\mathrm{P}$，すなわち点 P で交わり，その点で進行方向を共有するとき，γ と σ は P で **1 次の接触**をするという．このとき，補題 5.1 のような向きを保つ等長変換

2021 年 11 月 04 日 (2021 年 11 月 11 日訂正)

を γ, σ に施し，それぞれの曲線を原点の近くで $(x, f(x))$, $(x, g(x))$ とグラフ表示しておく．この状況で γ, σ が $\mathrm{P} = \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で p **次の接触**（$p = 2, 3, \dots$）をするとは，次が成り立つことである：

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{d^k g}{dx^k}(0) \qquad (k = 1, \dots, p).$$

命題 5.5. 平面曲線 $\gamma(t)$ の点 $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円は P において γ と 2 次の接触をする．

■座標変換　一般に $\mathbb{R}^n$ の領域 U から $\mathbb{R}^m$ への C^∞-級写像 $\boldsymbol{f} = {}^t(f_1, \dots, f_m) \colon U \to \mathbb{R}^m$ の点 P における**微分**とは，$(df)_{\mathrm{P}} \colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{v} \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \boldsymbol{f}(\mathrm{P} + t\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^m$ のことである．$(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = (D\boldsymbol{f})(\mathrm{P})\boldsymbol{v}$ が成り立つので $(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}$ は線形写像である．ここで，(m, n)-行列に値をもつ関数 $D\boldsymbol{f} := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)$ は $\boldsymbol{f}$ の**ヤコビ行列**とよばれる．

定義 5.6. 領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi \colon U \to V$ が**微分同相写像**であるとは，Φ と Φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．これを**座標変換**ということもある．

例 5.7.
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto \sinh x$ は微分同相写像である．
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto x^3$ は微分同相写像でない．
- $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ への写像 ${}^t(r, \theta) \mapsto {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像でない．
- $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\,;\, x \leqq 0\}$ への写像 ${}^t(r, \theta) \mapsto {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像である．

定理 5.8 (逆写像定理)**.**
- 微分同相写像 $\Phi \colon \mathbb{R}^m \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ のヤコビ行列 $D\Phi$ は U の各点で正則行列を与える．すなわち**ヤコビ行列式**（ヤコビアン）$\det D\Phi$ は零でない．
- C^∞-級写像 $\Phi \colon \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ のヤコビ行列 $D\Phi$ が点 $\mathrm{P} \in U$ で正則ならば，P の近傍 U' が存在して $\Phi|_{U'} \colon U' \to \Phi(U')$ は微分同相写像となる．

事実 5.9. 「二つの平面曲線が p 次の接触をする」という性質は座標変換によらない．すなわち，二つの平面曲線 $\gamma(t)$, $\sigma(u)$ が点 $\mathrm{P} := \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で p 次の接触をするならば，P の近傍 U で定義された微分同相写像 $\Phi \colon U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ に対して $\Phi \circ \gamma$, $\Phi \circ \sigma$ は $\Phi(\mathrm{P})$ で p 次の接触をする．

問題

5-1 弧長パラメータで表示された平面曲線 $\gamma(s)$ の曲率を κ，$\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率円を C_{P} と書く．
  (1) s_0 における κ の微分係数 $\kappa'(s_0)$ が零でないとき，γ は s_0 において C_{P} を横切る，すなわち十分小さい正の数 ε で $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0)$ で $\gamma(s)$ は C_{P} の内側（外側），$s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$ で $\gamma(s)$ は C_{P} の外側（内側）にあるようなものが存在することを示しなさい．
  (2) $\kappa'(s_0) = 0$ のとき，γ が s_0 において C_{P} を横切る例，横切らないような例を 1 つずつ挙げなさい．

5-2 正則平面曲線 γ の点 $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円を C_{P} とする．「C_{P} と γ が P において 3 次以上の接触をする」という条件は，$\mathbb{R}^2$ の変換 $\delta_k \colon \boldsymbol{x} \mapsto k\boldsymbol{x}$, $\iota \colon \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ によって保たれることを示しなさい．ただし k は零でない定数，ι の場合は P が座標原点でないものとする．

5-3 正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot\gamma(t_0) = \boldsymbol{0}$ かつ $\det(\ddot\gamma(t_0), \dddot\gamma(t_0)) \neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい．