幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の大域的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/11

問題 5-1

問題

弧長パラメータで表示された平面曲線 $\gamma(s)$ の曲率をを κ, $\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率円を C_{P} と書く．

1. s_0 における κ の微分係数 $\kappa'(s_0)$ が零でないとき，γ は s_0 において C_{P} を横切る，すなわち十分小さい正の数 ε で $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0)$ で $\gamma(s)$ は C_{P} の内側（外側），$s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$ で $\gamma(s)$ は C_{P} の外側（内側）にあるようなものが存在することを示しなさい．
2. $\kappa'(s_0) = 0$ のとき，γ が s_0 において C_{P} を横切る例，横切らないような例を 1 つずつ挙げなさい．

グラフ表示で $P=(0,0)$, $y=f(x)$ $f'(0)=f(0)=0$

$\kappa(0)=f''(0)$ $\kappa'(0)=f'''(0)$

- $\gamma(x)={}^t(x,\ f(x))$ $\gamma'(x)={}^t(1,\ f')$ $'=\dfrac{d}{dx}$

  $|\gamma'|=\sqrt{1+f'^2}$ $\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+f'^2}$ s: 弧長

- $\gamma''={}^t(0,\ f'')$

$$\kappa(0)=\frac{\det(\gamma'\ \gamma'')}{|\gamma'|^3}(0)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ f' & f''\end{vmatrix}}{\sqrt{1+f'^2}^{\,3}}(0)$$

$$=\frac{f''(0)}{\sqrt{1+f'^2(0)}^{\,3}}=f''(0)$$

• $\kappa = \dfrac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^{\,3}}$ $\qquad \dfrac{ds}{dx}(0) = \sqrt{1+f'^2} = 1$

$$\frac{d\kappa}{ds}(0) = \frac{dx}{ds}\frac{d\kappa}{dx}(0) = \frac{1}{\frac{ds}{dx}(0)}\boxed{\frac{d\kappa}{dx}(0)}$$

$$\frac{d\kappa}{dx}(0) = \frac{f'''}{\sqrt{1+\cancel{f'}^2}^{\,3}} + \frac{\star\, f''}{\sqrt{}}\, 2\cancel{f'}f''$$

$$= f'''(0)$$

$y = f(x)$ $\quad \kappa(0) = f''(0)$ $\quad \kappa'(0) = f'''(0)$

$$f(x) = \frac{\kappa(0)}{2}x^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$f(0)=0$

$f'(0)=0$

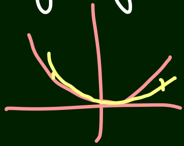
符号ちがう?

曲率円

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\kappa(0)}\right)^2 = \frac{1}{\kappa(0)^2}$$

$\boxed{y = x^k}$

$$y = g(x) = \frac{1}{\kappa(0)} \pm \sqrt{\frac{1}{\kappa(0)^2} - x^2}$$



$$= \frac{1}{\kappa(0)} - \frac{1}{\kappa(0)}\sqrt{1 - \kappa(0)^2 x^2}$$

$g(0)=0$

$$= \frac{\kappa(0)}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$g(x) - f(x) = -\frac{\kappa'(0)}{6}x^3$$

3次の項は..

$$\sqrt{1-\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-\xi)^k$$ 収束半径 1

= 二項定理

= 二項係数

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

α: 正の整数 ⇒ ${}_{\alpha}C_{k}$

$$\sqrt{1-\xi} = 1 - \frac{1}{2}\xi + o(\xi^2)$$

問題 5-2

問題

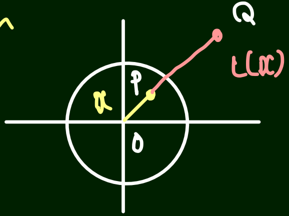
正則曲線 γ の点 $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円を C_{P} とする．「C_{P} と γ が P において 3 次以上の接触をする」という条件は，$\mathbb{R}^2$ の変換 $\delta_k \colon \boldsymbol{x} \mapsto k\boldsymbol{x}$, $\iota \colon \boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ によって保たれることを示しなさい．ただし k は零でない定数，ι の場合は P が座標原点でないものとする．

どのパラメータでも良い

$\kappa(0) = 0$

δ_k : 相似拡大・縮小

C



$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1^2$

単位円にかんする反転

・接触：座標変換で不変

$\gamma(s)$　s: 弧長

$\tilde{\gamma}(s) = \delta_k \circ \gamma(s) = k\gamma(s)$

$\tilde{\gamma}$ の弧長 : $\tilde{s} = ks$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\det(\tilde{\gamma}' \ \tilde{\gamma}'')}{|\tilde{\gamma}'|^3} = \frac{k^2 \det(\gamma' \ \gamma'')}{k^3 |\gamma'|^3} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{定数}} \kappa$$

$\kappa' = 0 \iff \tilde{\kappa}' = 0$

問題 5-2　反転

$\gamma(s)$：平面曲線；s：弧長；$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})$：フルネ枠

$$\gamma' = \boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e}$$

$\gamma = \sigma\boldsymbol{e} + \rho\boldsymbol{n}$ とおく．

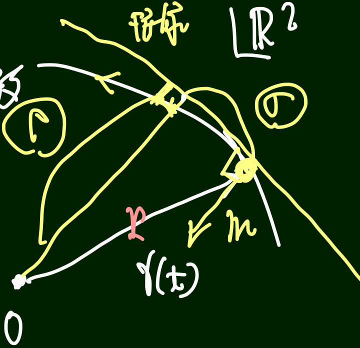
$$c(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma\cdot\gamma}$$

$$r^2 := \sigma^2 + \rho^2 = |\gamma|^2$$

支持関数

supporting funct

$$\hat{\gamma} = \frac{\gamma}{r^2} = \frac{1}{r^2}(\sigma\boldsymbol{e} + \rho\boldsymbol{n})$$



- γ のパラメータは弧長

$\gamma = \sigma e + \rho n \qquad \gamma' = \sigma' e + \sigma e' + \rho' n + \rho n'$

$= (\sigma' - \kappa\rho) e + (\rho' + \kappa\sigma) n$

$e = \gamma'$, $\sigma' - \kappa\rho = 1$, $\rho' + \kappa\sigma = 0$

$$\boxed{\sigma' = 1 + \kappa\rho \qquad \rho' = -\kappa\sigma}$$

$\hat{\gamma} = \frac{1}{r^2}\gamma$

$r^2 = \sigma^2 + \rho^2$

γ'

$\hat{\gamma}''$?

$$\boxed{\begin{aligned}(r^2)' &= 2(\sigma\sigma' + \rho\rho') \\ &= 2\sigma\end{aligned}}$$

$|\hat{\gamma}'|^2 = r^{-4}$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\det(\tilde{\gamma}' \ \tilde{\gamma}'')}{|\tilde{\gamma}'|^3} = -\kappa r^2 - 2\rho$$

$$\tilde{\kappa}' = -\kappa' r^2 - \kappa (r^2)' - 2\rho'$$

$$= -\kappa' r^2 - \kappa(2r) + 2(\kappa r)$$

$$= -\kappa' r^2 \qquad \square$$

問題

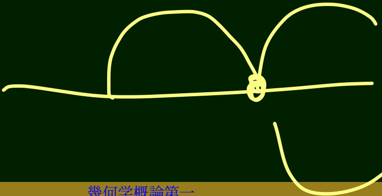
正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ かつ $\det(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)) \neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい.

Ans パラメータ変換と座標変換を施すと

$\tilde{\gamma}(t) = {}^t(t^2, t^3)$

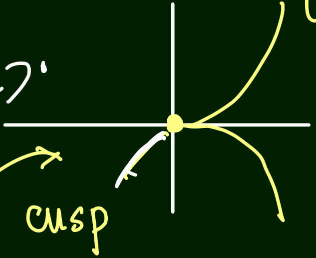
cycloid

標準カスプ



cusp

${}^t(t^2, t^3)$



$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(t(u)) \qquad \frac{dt}{du} \neq 0$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du} = \frac{dt}{du}\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2} = \star \frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{dt}{du}\right)^2 \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

$$\frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3} = \star \frac{d\gamma}{dt} + \star\star \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \left(\frac{dt}{du}\right)^3 \frac{d^3\gamma}{dt^3}$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2} & \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3} \end{pmatrix} = \left(\frac{dt}{du}\right)^{5} \det\begin{pmatrix} \frac{d^2\gamma}{dt^2} & \frac{d^3\gamma}{dt^3} \end{pmatrix}$$

座標変換

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi\colon U \to V$ が**微分同相写像**または**座標変換**であるとは，Φ と Φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．

座標変換

例

- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto \sinh x$ は微分同相写像である．
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto x^3$ は微分同相写像でない．
- $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ への写像
  ${}^t(r,\theta) \mapsto {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像でない．
- $(0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \leqq 0\}$ への写像
  $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像である．

問題 5-3

問題

正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot\gamma(t_0)=\mathbf{0}$ かつ $\det(\ddot\gamma(t_0),\dddot\gamma(t_0))\neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P}:=\gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい.

$$\Phi : {}^t(x,y) \longmapsto {}^t(\xi(x,y), \eta(x,y))$$

$$\tilde\gamma = \Phi\circ\gamma$$

$$\tilde\gamma' = (D\Phi)\cdot\gamma'$$

Jacobi 行列

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

正則

$\tilde\gamma' = P\gamma'$ $\qquad P = D\Phi$

$\tilde\gamma'' = (P_x \dot x + P_y \dot y)\gamma'$ $\qquad \gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\dot x = \dot y = 0$

$+ P\gamma''$

$\tilde\gamma''' = \cancel{\ast}\gamma' + (\ \ \ \ )\gamma'' + P\gamma''$

$+ (P_x \dot x + P_y \dot y)\gamma'' + P\gamma'''$

$\det(\tilde\gamma' \tilde\gamma'') = \det(P\gamma', P\gamma'')$

問題 5-3

問題

正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ かつ $\det(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)) \neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい.