幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の大域的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/11

問題 5-1

問題

弧長パラメータで表示された平面曲線 $\gamma(s)$ の曲率をを κ, $\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率円を C_P と書く.

1. s_0 における κ の微分係数 $\kappa'(s_0)$ が零でないとき，γ は s_0 において C_P を横切る，すなわち十分小さい正の数 ε で $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0)$ で $\gamma(s)$ は C_P の内側（外側），$s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$ で $\gamma(s)$ は C_P の外側（内側）にあるようなものが存在することを示しなさい.
2. $\kappa'(s_0) = 0$ のとき，γ が s_0 において C_P を横切る例，横切らないような例を 1 つずつ挙げなさい.

問題 5-2

問題

正則曲線 γ の点 $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円を C_{P} とする．「C_{P} と γ が P において 3 次以上の接触をする」という条件は，$\mathbb{R}^2$ の変換 $\delta_k\colon \boldsymbol{x} \mapsto k\boldsymbol{x}$, $\iota\colon \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ によって保たれることを示しなさい．ただし k は零でない定数，ι の場合は P が座標原点でないものとする．

問題 5-2

$\gamma(s)$：平面曲線；s：弧長；$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠

$$\gamma' = \boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e}$$

$\underline{\gamma = \sigma\boldsymbol{e} + \rho\boldsymbol{n}\text{ とおく．}}$

問題 5-3

問題

正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ かつ $\det(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)) \neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい.

座標変換

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi\colon U \to V$ が微分同相写像または座標変換であるとは，Φ と Φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．

座標変換

例

- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto \sinh x$ は微分同相写像である.
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto x^3$ は微分同相写像でない.
- $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ への写像 ${}^t(r,\theta) \mapsto {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像でない.
- $(0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \leqq 0\}$ への写像 $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像である.

問題 5-3

問題

正則とは限らない平面曲線 $\gamma(t)$ に関する条件「$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ かつ $\det(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)) \neq 0$」は曲線のパラメータ変換と $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ の近傍における座標変換によらないことを示しなさい.