

# 幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の大域的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/>

東京工業大学理学院数学系

2021/11/11 (2021/11/11 訂正)

曲線全体をみないと  
局所的性質

大域 global  
局所 local

# 閉曲線

周期  $L$  の (平面) 閉曲線 :

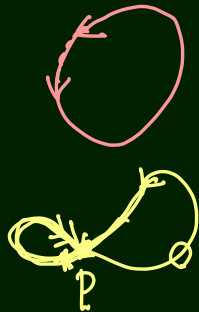
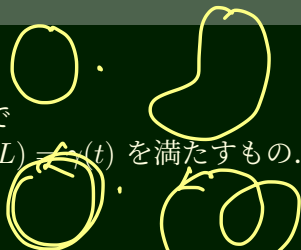
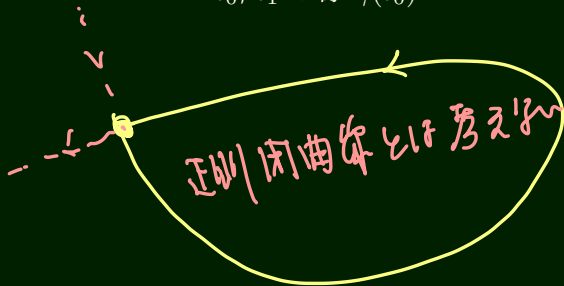
$C^\infty$ -級写像  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  で

任意の  $t$  に対して  $\gamma(t+L) = \gamma(t)$  を満たすもの.

周期  $L$  の閉曲線  $\gamma$  の自己交叉 :

$\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$  ( $t_1 - t_0 \not\equiv 0 \pmod{L}$ ) となる

$t_0, t_1$  の像  $\gamma(t_0)$



# 閉曲線 (例)

$$\gamma(s) = {}^t(r \cos(s/r), r \sin(s/r))$$

$$r > 0$$

周長  $(2\pi r)$

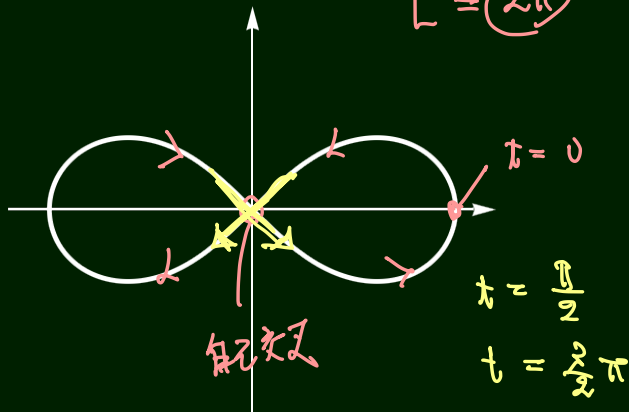
半径  $r$  の円

$s$ : 弧長

# 閉曲線 (例)

$$\gamma(t) = {}^t \left( \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad a > 0$$

$L = 2\pi$

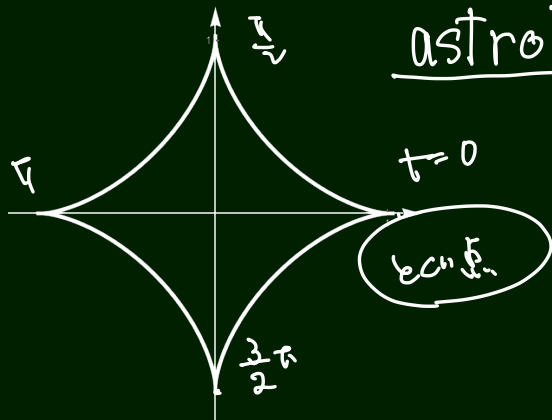


# 閉曲線 (例)

$$\gamma(t) = (a^3 \cos^3 t, a^3 \sin^3 t)$$

同値  $2\pi$

astroid



# 閉曲線の全曲率と回転数

正則な閉曲線  $\gamma' \neq 0$

$\gamma(s)$  : 周期  $L$  の閉曲線 ;  $s$  : 弧長 ;  $\kappa$  : 曲率

$$\text{全曲率} = T_\gamma := \int_0^L \kappa(s) ds, \quad \text{回転数} = i_\gamma := \frac{1}{2\pi} T_\gamma \in \mathbb{Z}$$

## 命題

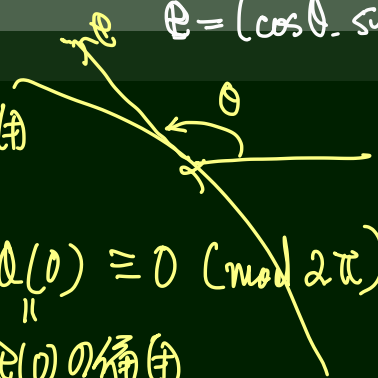
閉曲線の回転数は整数である。

$$\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$$

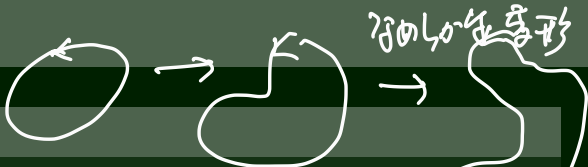
$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa \quad \theta(L) \text{ の偏角}$$

$$\int_0^L \kappa(s) ds = \theta(L) - \theta(0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$\theta(0) = \theta(L)$        $\theta(0)$  の偏角



# 回転数の不変性



## 定義

周期  $L$  の2つの正則閉曲線  $\gamma_0(t)$ ,  $\gamma_1(t)$  がなめらかな変形に移りあう (正則ホモトピー同値) であるとは、 $C^\infty$ -級写像  $\sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \rightarrow \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$  で次を満たすものが存在することである:

- ▶  $\alpha \in [0, 1]$  を固定するとき,  $\sigma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  は周期  $L$  の正則閉曲線である.
- ▶  $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$ ,  $\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$  が成り立つ

回転数の不変性

## 命題

2つの正則閉曲線  $\gamma_0, \gamma_1$  が正則ホモトピー同値ならば, (回転数) は一致する.

# 回転数の性質

## 事実

ここでは証明を与えないが、次が成り立つ：

- ▶ 2つの正則閉曲線の回転数が一致するならば、それらは正則ホモトピー同値である（ホイットニーの定理，テキスト 33 ページ，定理 3.3）。
- ▶ 単純閉曲線の回転数は 1 または  $-1$  である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）。



## 問題 6-1

### 問題

定数  $a, b$  に対して  $\kappa(s) := a \cos s + b$  とおく. パラメータ  $s$  が弧長で曲率が  $\kappa(s)$  となるような曲線を  $\gamma_{a,b}$  とする.

1.  $\gamma_{a,b}$  が周期  $2\pi$  の閉曲線ならば,  $b$  は整数であることを示しなさい.
2. 与えられた整数  $b$  に対して  $\gamma_{a,b}$  が閉曲線となるような正の数  $a$  は存在するか.

$$\kappa \rightarrow \gamma$$

## 問題 6-2

### 問題

定数  $a \in [0, 1]$  に対して, 周期  $2\pi$  の曲線  
 $\gamma_a(s) = (1 - 2a \sin s)^t (\cos s, \sin s)$  の全曲率を求めなさい.

$S$ : 弧長が  $2\pi$ .

## 問題 6-3

### 問題

次の曲線の“全曲率”を求めなさい.

1.  $\gamma_1(t) := {}^t(t, t^2) \ (-\infty < t < \infty)$ .
2.  $\gamma_2(t) := {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \ (0 < t < \infty)$ .

本日の課題の提出締切は

2021年11月15日（月曜日）07:00 JST

今回が最後の課題になります