幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の大域的性質

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/11 (2021/11/11 訂正)

閉曲線

周期 L の（平面）閉曲線：

C^∞-級写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で
任意の t に対して $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ を満たすもの.

周期 L の閉曲線 γ の自己交叉：

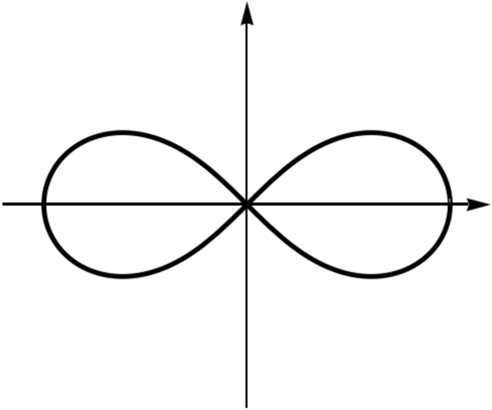
$\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$（$t_1 - t_0 \not\equiv 0 \pmod{L}$）となる
t_0, t_1 の像 $\gamma(t_0)$

閉曲線（例）

$$\gamma(s) = {}^t(r\cos(s/r), r\sin(s/r))$$

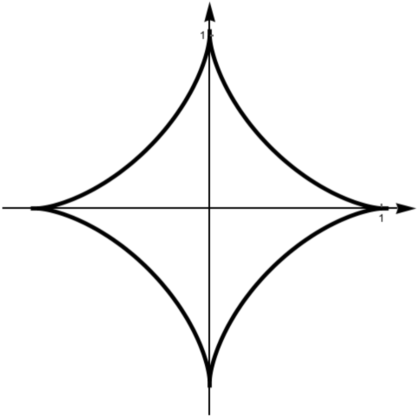
閉曲線（例）

$$\gamma(t) = {}^t\left(\frac{a\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$$



閉曲線（例）

$$\gamma(t) = {}^t(a^3\cos^3 t, a^3\sin^3 t)$$



閉曲線の全曲率と回転数

$\gamma(s)$：周期 L の閉曲線；s：弧長；κ：曲率

$$\text{全曲率} = T_\gamma := \int_0^L \kappa(s)\, ds, \qquad \text{回転数} = i_\gamma := \frac{1}{2\pi} T_\gamma$$

命題

閉曲線の回転数は整数である．

回転数の不変性

定義

周期 L の 2 つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$，$\gamma_1(t)$ が
なめらかな変形で移りあう（正則ホモトピー同値）であるとは，
C^∞-級写像 $\sigma\colon [0,1]\times\mathbb{R}\ni(\alpha,t)\to\sigma_\alpha(t)\in\mathbb{R}^2$ で次を満たすもの
が存在することである：

- $\alpha\in[0,1]$ を固定するとき，$\sigma_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線である．
- $\sigma_0(t)=\gamma_0(t)$，$\sigma_1(t)=\gamma_1(t)$ が成り立つ．

命題

2 つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば，回転数は一致する．

回転数の性質

事実

ここでは証明を与えないが，次が成り立つ：

- ２つの正則閉曲線の回転数が一致するならば，それらは正則ホモトピー同値である（ホイットニーの定理，テキスト 33 ページ，定理 3.3）.
- 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）.

問題 6-1

問題

定数 a, b に対して $\kappa(s) := a\cos s + b$ とおく．パラメータ s が弧長で曲率が $\kappa(s)$ となるような曲線を $\gamma_{a,b}$ とする．

1. $\gamma_{a,b}$ が周期 2π の閉曲線ならば，b は整数であることを示しなさい．
2. 与えられた整数 b に対して $\gamma_{a,b}$ が閉曲線となるような正の数 a は存在するか．

問題 6-2

問題

定数 $a \in [0,1]$ に対して，周期 2π の曲線
$\gamma_a(s) = (1-2a\sin s)^t(\cos s, \sin s)$ の全曲率を求めなさい.

問題 6-3

問題

次の曲線の “全曲率” を求めなさい.

1. $\gamma_1(t) := {}^t(t, t^2)$ $(-\infty < t < \infty)$.
2. $\gamma_2(t) := {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(0 < t < \infty)$.