2021 年 11 月 11 日 (2021 年 11 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 6

- 本日，定期試験の予告をします．

■前回の補足

- 答案に「題意」という語を使われた方が複数名いらっしゃいます．残念なことに山田は「題意」という語の意味を知りません．適切な語（大抵の場合は「結論」でよいのではないでしょうか）に置き換えてください．ときどき「仮定」の意味でも「題意」を使う方がいらっしゃって紛らわしいので．（題意は「問題の意味」ですから「示せ」の部分だと思うんですが，違うのでしょうか．正確な意味をご存知の方がいらっしゃいましたらご教示ください．できれば適切なリファレンスも．）
- 事実 5.9 の証明を作った方がいらっしゃいました．ありがとうございます．テキストの命題 2.6 の一般化になりますね．

■前回までの訂正

- 講義資料 5, 3 ページ，補題 5.2 の 5 行目：$(x, f(x)) \Rightarrow {}^t(x, f(x))$
- 講義資料 5, 4 ページ，例 5.7 の 4 項目：$(0,\infty)\times\mathbb{R} \Rightarrow (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$（講義で修正，直前に T2SCHOLA 差し替え済み）
- 講義資料 5, 4 ページ，例 5.7 の 4 項目：$(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta) \Rightarrow {}^t(r,\theta)\mapsto{}^t(r\cos\theta, r\sin\theta)$
- 講義資料 5, 4 ページ，事実 5.9 の 3 行目：$\Phi(U)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow \Phi(U)\subset\mathbb{R}^2$
- 講義資料 5, 4 ページ，問題 5-1 の 1 行目：曲率をを $\Rightarrow$ 曲率を

■授業に関する御意見

- エゴサーチされていることを見かけて吃驚いたしました．入学歓迎会ありがとうございました．
  山田のコメント： 前半：みんなやってるんじゃない？ 後半：こちらこそ，楽しんでいただけたのなら良かったです．仮装行列 3 回興行はなかなかしんどい．
- `\coloneqq` ($\coloneqq$) でなく `:=` (:=) で書かれているのは何か理由があるのでしょうか?
  山田のコメント： ばれましたか．(1) 大昔から `:=` で書いているので習慣を変えるのが面倒くさい．(2) `amssymb.sty` で定義されていない．
- 難しくて問題が 1 つも解けません．問題の解答・解説を配布して欲しいです． **山田のコメント：** 講義で説明し，黒板も配布しています．
- 課題提出の締切はゆっくりの方が良いですね．（注：締切を早くして講義資料の公開を早くしてほしいという要望を出した方から） **山田のコメント：** でしょ．
- 何をどう勉強したらよいかわかりません．講義をきくと分かった気になりますが，問題が一切，全く解けません．
  山田のコメント： 分かった気がいちばんまずい．講義のあと自分で内容が再現できるように復習してほしい．もちろん時間がかかります．
- （前回，回答スペースが狭いと主張したものですが,）今回は下書きをしっかりやっても，やはりスペースが厳しかったです．ゴリゴリの微分計算，久しぶりに楽しかったです．
  山田のコメント： そんなに大変だった？
- 問題 5-1 の 2 で $y = x^3$ を調べていたらめちゃくちゃ沼りました．($x = 0$ で $\kappa' = 0$ にならず，$x = 1/\sqrt[4]{45}$ では κ' は 0 になるが曲率円を横切らないと思われる)
  山田のコメント： 0 の近傍以外で考えたのね．
- 曲線のふるまいを調べる道具がそろってきて，幾何学の面白さを実感している． **山田のコメント：** それはうれしい．問題に「いろいろ遊べる」おもちゃを出しているつもり．
- 教科書を書いました（原文ママ）．テストがんばります． **山田のコメント：** お買い上げありがとうございます．
- 回を重ねるごとに問題が重くなり，答案用紙のサイズがきゅうくつになってきました．枚数増やしてほしいです． **山田のコメント：** おさまるよ．

■質問と回答

質問 1： 定義 5.6 などに領域という言葉がありましたが，この領域という言葉の定義を知りたいです．

お答え： 連結開集合．「位相」の授業で習う．

質問 2： 微分同相写像について講義内で扱った例はすべて開区間同士の写像でしたが，閉区間から閉区間への写像で微分同相写像となるものはありますか？ **お答え：** この講義では（面倒なので）扱わない．区間以外にも平面の領域の例もあげてますよ．

質問 3： 横切るを定義するときに，C_{P} の内側，外側という単語が出てきましたが，これは境界は含まないという意味ですか．また曲率円（原文ママ：曲率のことか）が 0 のときの内側，外側とは，内側が $y > 0$，外側が $y < 0$ という領域でしょうか．

お答え： 前半：はい．後半：たしかに不備ですね．ここでは $\boldsymbol{n}$ が指す側の領域を内側と呼びましょう．

質問 4： 曲率円の定義について P における進行方向が γ と一致するというものがありますが，逆に進行方向を逆とした場合，γ と接触しない円ということになるのでしょうか．$f(0) = f'(0) = 0$ となるグラフ曲線に変換すると，これでも問題ないように感じるのですがどうでしょうか． **お答え：**「2 次の接触をする」という語の定義に含まれていますので問題あります．感覚的に「接触」という語を使っているのではないことに注意．

質問 5： 例 5.4 で書かれている $\kappa(0) = f''(0)$ は，テイラーの定理と (5.1) 式から導かれる $f(x) = \frac{\kappa(0)}{2}x^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}x^3 + o(x^3)$ を 2 回微分した $f''(x) = \kappa(0) + \kappa'(0)x + o(x)$ に $x = 0$ を代入することで示されるのですか？

お答え： いいえ．(5.1) 式から $f(x) = \ldots$ の式は導かれますか？

質問 6： 2 次元で曲率円なら 3 次元だと曲率球なるものが存在するのか，それとも曲率円と捩率円の 2 種類になるのか．

お答え： 3 次元とは 3 次元空間内の曲線のこと？ 曲率円は問題 4-3.

質問 7： $\kappa(0) \to \infty$ となる場合，曲率円は定義されないのか，それとも半径 0 の円として原点が曲率円になるのか気になります．

お答え： 正則曲線上で $\kappa = \infty$ となる場合があるか気になりませんか？

質問 8： 正則平面曲線 $\gamma(t)$ と円を表す正則曲線 $C(t)$ について命題 5.5 の逆「γ と C が $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ で 2 次の接触をする $\Rightarrow$ C は γ の P における曲率円となる」が真だと予想したのでその証明を考えてみました．（以下略）

お答え： おっしゃるとおりですね．一般論として 2 次の接触をするなら曲率が等しいということです．

質問 9： 空間曲線における曲率円について，空間曲線においても曲率円を定義することができるのかを考えた．すると，講義資料の定義 5.3 と同じ文言で定義できることがわかった．具体的にどのように表されるのかを計算してみた．正則空間曲線 $\gamma(t)$ について，単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(t)$，単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ はそれぞれ $\boldsymbol{e} = \ldots$，$\boldsymbol{n} = \ldots$ と表され，$\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ における曲率 $\kappa(t_0)$

は ... で表される.（式省略．テキスト 55 ページの (5.6), (5.7) 式）．このとき $\kappa(t_0)\neq 0$ ならば γ の $\mathrm{P}:=\gamma(t_0)$ における曲率円 C_{P} の中心 C は $C=\gamma(t_0)+\frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$ であり，曲率半径は $\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$ である.（下線山田）．実際の円は（以下略）.

お答え： 曲率円，曲率半径の定義はどこにも書いてありませんね．同じ文言で定義する，でよいのでしょうか．下線「曲率円は...である」という文ですとどこか他に曲率円の定義があり，定義からこのようなことがわかる，という意味になりますが．また，省略した $\boldsymbol{e}$... などの式は後半の文のどこに必要ですか？

質問 10： 曲率が 0 でない時，2 次以上の接触をする円（陰関数）は曲率円ですが，常に 3 次以上の接触をする陰関数はどのようにグラフ表示できますか． **お答え：**意味がとれない．円（陰関数）とは何ですか？「3 次以上の接触をする陰関数」とは？

質問 11： 1 次の接触では直線で近似，2 次の接触では円で近似することが多いようですが，3 次の接触ではどのような図形で近似することが多いのでしょうか． / 平面曲線と 1 次の接触をする曲線は無数に存在しますが，1 次の接触をする直線は接線しか存在せず，一つに決まります．また，平面曲線と 2 次の接触をする円は曲率円しか存在せず，一つに決まります．これらと同様に平面曲線と 3 次の接触をして，なおかつ一つに決まるような特定の種類の曲線はあるのでしょうか？ **お答え：**2 次曲線でできますか？

質問 12： 授業中にお話されていたのかもしれませんが，何故曲率半径を $\frac{1}{|\kappa|}$ と定義しているのでしょうか？ 曲線の向心加速度が $|\kappa|$ なら半径 $|\kappa|$ の円と定義するのが自然なように思いました． **お答え：**円の半径が小さいほうが加速度は大きくないでしょうか？

質問 13： 1 次の接触だけ 2 次以降と定義が違うのはなぜでしょうか.

お答え： 両方の曲線をともに x 軸に接する位置にもってくるためにはもともと共通の接線をもっていなければならないので.

質問 14： p 次の接触の定義でわざわざグラフ表示へ変換して定義していましたが，例えば γ と σ が s_0 で p 次接触を $\gamma^{(k)}(s_0)=\sigma^{(k)}(s_0)$ $(k=1,\dots,p)$ などとすると問題があるのですか． **お答え：**まずご質問の定義だと $\gamma(s_0)=\sigma(s_0)$ がでない（k を 0 からにすればよい）．また，この定義はパラメータのとり方による．何らかの形でパラメータを標準化する必要がある.

質問 15： 授業では $2\leqq p$ の場合の p 次の接触はグラフ表示によって定義していますが，グラフ表示を用いずに p 次の接触を確かめる方法はありますか？ **お答え：**テキスト命題 2.5.

質問 16： 2 つの曲線の p 次の接触のように座標変換によらない性質は曲線そのもの性質として考えてよいでしょうか？

お答え：「曲線そのもの」を何と考えるかによります.

質問 17：（高次の接触（資料 C,6 ページ）での記号を用います）「任意の $p\in\mathbb{N}$ に対し，$\frac{d^pf}{dx^p}(0)=\frac{d^pg}{dx^p}(0)$ が成り立つとしても，原点から十分遠い点を考えれば $f\neq g$ となる」は正しいでしょうか． **お答え：**はい，$f(x)=e^{-1/x^2}$ $(x\neq 0)$，$f(0)=0$，$g(x)=0$ とおくとご質問の性質が成り立ちますが，原点以外で $f(x)\neq g(x)$ です.

質問 18： 任意の自然数 n に対して 2 つの平面曲線が n 次の接触をしているとき，その 2 つの曲線は同一の曲線だとみなしてよいのでしょうか？ **お答え：**いいえ.

質問 19： “p 次の接触” は座標変換によらない性質ということがわかりましたが，他に不変な性質はあるでしょうか．また位相の授業でも同相写像（位相）を扱いましたが，これと関連があるのでしょうか． **お答え：**前半：いくらでも．後半：同相写像は連続写像，微分同相写像（座標変換とここではいっている）は C^∞-級写像．微分同相なら同相.

質問 20： 事実 5.9 の証明について，...(i) 正則曲線 $\gamma(t)$ の像 $(\Phi\circ\gamma)(t)$ が正則曲線を与える事．像の滑らかさは Φ と γ の滑らかさによって保証される．(ii) t が正則曲線を与えるパラメータであること．（以下略）

お答え： ここからおかしい．(i) は不要だし，「保証される」の文は（なめらかを正則曲線と読めば）正しくない.

質問 21： 正則曲線の曲率関数 κ の微分 κ' は弧長パラメータに直した上で微分したものを指しますか.

お答え： はい．ただ，$\kappa'=0$ という性質は微分するパラメータによらない.

質問 22： $\kappa'(0)$ の時（原文ママ：$\kappa'=0$ のとき？）は 4 次の場合のブーケの公式を調べれば横切るかどうか判定できることがあるのでしょうか． **お答え：**はい.

質問 23： 微分同相写像は $\mathbb{R}^m$ の通常の位相における同相写像ですか？ **お答え：**はい．可微分写像は連続なのであたりまえ.

質問 24： 定義 5.6 の “座標変換” Φ は Φ, Φ^{-1} ともに C^∞ 級の仮定がありましたが，これを C^r 級に変えて “C^r 級の座標変換” など考えられないでしょうか？ また “2 つの平面曲線が p 次の接触をする” という性質が “C^r 級の座標変換によらないためには r はどの程度大きい必要があるでしょうか？（$r\geqq p$ とか？） **お答え：**2, 3 くらいだったらすぐわかるはず．やってみよう.

質問 25：「2 つの平面曲線が p 次の接触をする」という性質が座標変換で保たれるには，変換が C^p 級くらいの微分同相であることが必要そう．単なる微分同相でも本当に保たれますか？ **お答え：**定義 5.6 を見よ.

質問 26： γ を弧長パラメータ表示された平面曲線，$\Phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を微分同相写像としたとき，$\tilde\gamma:=\Phi\circ\gamma$ で定義される平面曲線の曲率 $\tilde\kappa$ が γ の曲率 κ で表せないかと思い，計算したところ次の式を得ました.

$$\tilde\kappa(t)=\frac{\det D\Phi(\gamma(t))}{|D\Phi(\gamma(t))\dot\gamma(t)|^{3/2}}\kappa(t)+\frac{\det(D\Phi(\gamma(t))\dot\gamma(t),D(D\Phi)(\gamma(t))(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}{|D\Phi(\gamma(t))\dot\gamma(t)|^{3/2}}.$$

ここで $D(D\Phi)(\gamma(t))\in\mathbb{R}^{(2\times 2)\times 2}$ を $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への双線形写像とみなした．右辺の第 2 項はこれ以上簡単にならないのですか？ また，Φ が線形写像なら第 2 項が 0 になることから，第 2 項は Φ の非線形性が現れているのだと考えたのですが，正しいですか．第 2 項の他の意味付けはありますか？

お答え： 正しいと思います．一般にはこの形まででしょうね．$\dot\gamma(t)$ の 3 次形式になっていて，3 次形式自体は曲線と独立ですね.

質問 27： 座標変換を微分同型写像とよぶそうですが，Φ と Φ^{-1} が C^∞ という条件が座標変換が $U\to V$ の同型写像であることを満たしているということでしょうか． **お答え：**この講義では「微分同相」といっています.「同型写像である」というフレーズ自体は多義的で，群の同型であったり，位相空間の同型であったり，文脈によって意味が違います．したがって回答不能.

質問 28： 以前に合同変換を学んだと思いますが，座標変換は合同変換でしょうか． **お答え：**いいえ．例 5.7.

質問 29： 今まで「パラメータ変換で移り合うパラメータ表示」全体をまとめて 1 種類の図形とみなしている気がしますが，このような枠組みにおいて，座標変換はパラメータ変換とどう関係がありますか？ どちらも同一の図形の見方を変える操作のような「お気

持ち」を感じますが… **お答え：**$\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ の定義域の変換と値域の変換．座標変換は合同変換より広いので形を変えますが．

質問 30： 例 5.4 は平面曲線 γ が C^∞-級関数 f のグラフで表示される場合を扱っていますが，一般の C^∞-級平面曲線 γ については，$\mathbb{R}^2$ の向きを保つ合同変換（略）とパラメータ変換（略）で（略）C^∞-級関数 f が存在して $\dots$（以下略） **お答え：**ということを講義で説明したはず．

質問 31： 2 つの正則平面曲線 $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ が $\mathrm{P}=\gamma(t_0)=\sigma(u_0)$ で p 次の接触するとき，2 次，3 次の接触とはグラフで考えるとどのような接触をしているのでしょうか？ **お答え：**意味がとれません．「p 次の接触をするとき 2 次の接触」とはどういうこと？

質問 32： 補題 5.2 では正則平面曲線 $\gamma(t)$ が（略，式 (5.1)）を満たす時にグラフ表示 $(x,f(x))$ とかけることを述べているが，他の条件でもグラフ表示とかけることはありますか？ **お答え：**テキスト 6–7 ページあたり．

質問 33： $g(x)=$（略，曲率円の式）が $g(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+\dots$ とテイラー展開できるという説明のとき，先生がぼそっと「計算してみましょう」と言っていたので実際にやってみました．（以下略） **お答え：**$\sqrt{1-x}$ を展開するには二項級数を使えばよいね．

質問 34： $(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}\boldsymbol{v}=(D\boldsymbol{f})(\mathrm{P})\boldsymbol{v}$ が成り立つのは $\boldsymbol{y}(t):=\mathrm{P}+t\boldsymbol{v}$ とすると $\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(\mathrm{P}+t\boldsymbol{v})=\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(t)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))\dot{\boldsymbol{y}}(t)=(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{v}$ より（略）となることより従うということでよろしいですか？ **お答え：**はい．

質問 35： $\mathbb{R}^3\ni\boldsymbol{v}={}^t(v_1,v_2,v_3)$ に対し，$x_1(\boldsymbol{v})=v_1$, $x_2(\boldsymbol{v})=v_2$, $x_3(\boldsymbol{v})=v_3$ とすると $(dx_i)_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})=v_1$ になるから $(dx_i)_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$ となり，$(dx_1)_{\mathrm{P}}$, $(dx_2)_{\mathrm{P}}$, $(dx_3)_{\mathrm{P}}$ が $\mathbb{R}^3$ の双対基底をなす，ということでよろしいですか．

お答え： はい．正しくは $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ の双対基底．

質問 36： 5-1 の 1 の「…にあるようなものが存在する」の「もの」は「平面曲線 γ」「平面曲線 γ 上の点 P」のどちらと解釈する方が正しいでしょうか．(2 件) **お答え：**どちらも正しくありません．「正の数 ε で …となるもの」ですから正の数です．

質問 37： 写像ではなく図形として曲線や曲面（例として $x^2+y^2+z^2=1$（3 次元），$y=x$（2 次元）など）に対してパラメータの入れ方において特異点の個数は変わりますが，その個数（や特異点全体の集合の濃度）の最小値を調べるためのよいアプローチはありますか？ 例えば $x^2+y^2+z^2=1$ に特異点をもたないパラメータはいれられますか？ **お答え：**第 7 回で少しだけ説明する．「例えば」の部分，球面の任意の点の近傍で特異点をもたないパラメータは入れられるが，全体を表示するパラメータはない．

質問 38： この講義中，先生は外積のことをベクトル積やクロス（積）とも読んでいましたが，何か使い分けている理由はあるのでしょうか？ それともただの気まぐれでしょうか？ また outer product は直積を意味するため外積と混乱しやすいと聞いたのですが，そのことと関係があるのでしょうか． **お答え：**「外積」とあまり言わないのは微分形式の外積が念頭にあるからです．

質問 39： 正則曲線に対し，その「曲がり具合」を曲率や曲率円，曲率半径を使って表現しましたが，正則でない曲線の特異点に対して，その「曲がり具合」もしくは「尖り具合」などを表現する方法はありますか？ **お答え：**はい．たとえばカスプ特異点なら「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学（梅原・佐治・山田）丸善出版 (2017)」の 17 ページ，カスプ的曲率．

質問 40： 曲面の曲率を定義することはできますか？ できる場合，曲率球を考えることがありますか． **お答え：**前半：4Q，後半：ない．

質問 41： あるスカラー関数 $G(t,x,y)$ (x,y,t が互いに一時独立（原文ママ：単なる「独立」か）に対して微分して $dG=(\partial_tG,\partial_xG,\partial_yG)^t(dt,dx,dy)$．そして両辺を dt で割ると $\frac{dG}{dt}=(\partial_tG,\partial_xG,\partial_yG)^t(1,\dot{x},\dot{y})$．上記の操作がよく使われますが，互いに独立であるのになぜか $\dot{x}$, $\dot{y}$ がゼロでないのですか?

お答え： この記号は $\tilde{G}(t)=G(t,x(t),y(t))$ という 1 変数関数の微分の略記です．

6 平面曲線の大域的性質

■閉曲線 平面曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が周期 $L\ (>0)$ をもつ，すなわち $\gamma(t+L)=\gamma(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ を満たすとき γ を**周期 L の閉曲線**とよぶ．閉曲線 γ の**自己交叉**とは，$\gamma(t_0)=\gamma(t_1)$（$t_1-t_0\not\equiv 0 \pmod L$）となる t_0, t_1 の像 $\gamma(t_0)$ のこととする．自己交叉をもたない閉曲線を**単純閉曲線**という．

例 6.1.
- 半径 r の円 $\gamma(s)={}^t(r\cos(s/r),r\sin(s/r))$ は周期 $2\pi r$ の単純閉曲線である．
- レムニスケート $\gamma(t)={}^t\left(\frac{a\cos t}{1+\sin^2 t},\frac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$ は周期 2π の閉曲線である．ただし t は弧長ではない．この曲線は原点に自己交叉をもつ．
- アステロイド $\gamma(t)={}^t(a^3\cos^3 t,a^3\sin^3 t)$ は閉曲線である．ただし t は弧長ではない．また，$t\equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ なる t に特異点をもつ．

弧長によりパラメータ付けられた周期 L の閉曲線 γ のフルネ枠 $\mathcal{F}(s)=(\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s))$，曲率関数 $\kappa(s)$ は周期 L をもつ．

2021 年 11 月 11 日 (2021 年 11 月 11 日訂正)

■全曲率と回転数　弧長パラメータ表示された周期 L の閉曲線 $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき，

$$T_\gamma := \int_0^L \kappa(s)\,ds, \qquad i_\gamma := \frac{1}{2\pi}T_\gamma$$

をそれぞれ γ の**全曲率**，**回転数**という．

命題 6.2. 閉曲線の回転数は整数である．

証明： 閉曲線を（適当な回転と平行移動を施して）

$$\gamma(s) = \int_0^s {}^t\bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du, \qquad \theta(s) := \int_0^s \kappa(u)\,du$$

と表示する．このとき，$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s) = {}^t(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ は周期 L をもつので，$\theta(s+L) = \theta(s) + 2m\pi$ (m は整数) と表される．とくに $T_\gamma = \theta(L) - \theta(0) = 2m\pi$ なので，$i_\gamma = m$ となる．

■閉曲線のなめらかな変形

定義 6.3. 周期 L の 2 つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$，$\gamma_1(t)$ が**なめらかな変形で移りあう（正則ホモトピー同値）**であるとは，C^∞-級写像 $\sigma\colon [0,1]\times\mathbb{R} \ni (\alpha, t) \to \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすものが存在することである：

- $\alpha \in [0,1]$ を固定するとき，$\sigma_\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線である．
- $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$，$\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$ が成り立つ．

正則ホモトピー同値は正則閉曲線全体の集合の同値関係である．

命題 6.4. 2 つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば，回転数は一致する．

証明： 定義 6.3 のような σ をとると，$\sigma_\alpha(t)$ の回転数は整数である．さらにこれは α の連続関数になるから，定数でなければならない．

事実 6.5. ここでは証明を与えないが，次が成り立つ：

- ２つの正則閉曲線の回転数が一致するならば，それらは正則ホモトピー同値である（ホイットニーの定理，テキスト 33 ページ，定理 3.3）．
- 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）．

問題

6-1 定数 a, b に対して $\kappa(s) := a\cos s + b$ とおく．パラメータ s が弧長で曲率が $\kappa(s)$ となるような曲線を $\gamma_{a,b}$ とする．

(1) $\gamma_{a,b}$ が周期 2π の閉曲線ならば，b は整数であることを示しなさい．

(2) 与えられた整数 b に対して $\gamma_{a,b}$ が閉曲線となるような正の数 a は存在するか．

6-2 定数 $a \in [0,1]$ に対して，周期 2π の曲線 $\gamma_a(s) = (1-2a\sin s)^t(\cos s, \sin s)$ の全曲率を求めなさい．

6-3 次の曲線の "全曲率" を求めなさい．

(1) $\gamma_1(t) := {}^t(t, t^2)$ $(-\infty < t < \infty)$.

(2) $\gamma_2(t) := {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(0 < t < \infty)$.