幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/18

問題 6-1

問題

定数 a, b に対して $\kappa(s) := a\cos s + b$ とおく．パラメータ s が弧長で曲率が $\kappa(s)$ となるような曲線を $\gamma_{a,b}$ とする．

(1). $\gamma_{a,b}$ が周期 2π の閉曲線ならば，b は整数であることを示しなさい．

(2). 与えられた整数 b に対して $\gamma_{a,b}$ が閉曲線となるような正の数 a は存在するか．

(2): 一般の b に対してはかなり煩雑．

閉曲線 $\Rightarrow$ 曲率は周期関数

$\not\Leftarrow$

e.g. $\kappa = 0$: 任意の正の数 L に対し周期 L をもつ

問題 2-2

問題

$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 $L\ (>0)$ を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

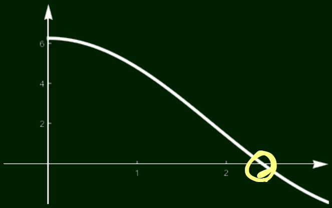
$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + a \qquad A \in SO(2)$$

とくに γ が周期 L の閉曲線

$$\Leftrightarrow \quad A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 0.$$

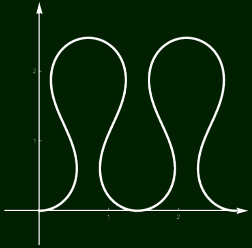
問題 6-1; $b = 0$

$$\kappa(s) = a \operatorname{cn}\begin{pmatrix} t & k \\ 0 & \end{pmatrix}$$

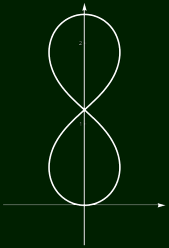


$a \to 0 \Rightarrow \kappa = 0$

直線



$a = 2$



$a \sim 2.4$

$a = 4$

$$\gamma(s) = \int_0^s t(\cos\theta(u),\ \sin\theta(u))\, du, \qquad \theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\, du$$

$$\theta(s) = a\sin s + bs \qquad T_\gamma = \theta(2\pi) - \theta(0)$$

否

$$= 2\pi b \qquad \therefore\ b \in \mathbb{Z}$$

閉曲線

$$e = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$e(s+2\pi) = e(s) \qquad n(s+2\pi) = n(s)$$

$$\gamma'(s+2\pi) = \gamma'(s) \qquad \gamma(s+2\pi) = \cancel{A}\,\gamma(s) + a$$

$$b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow A = I$$

a を求めたい.

$$a = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad \xi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta(s)\, ds. \qquad \eta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta(s)\, ds = 0$$

あたえられた $b\in\mathbb{Z}$ に対して $\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(a\sin s + bs)\, ds = 0$

となる a が存在するか?

$$
\overset{F(a)}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin s)\cos bs\, ds \quad \text{if } b:\text{even}
$$

$$
-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\sin s)\sin bs\, ds \quad \text{if } b:\text{odd}
$$

$b=0$

$a=0$: $\xi \neq 0$

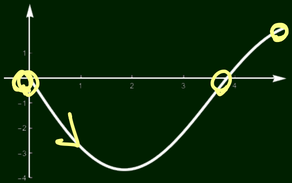
$a=\pi$

$$
\int_0^1 \cos au \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{1}
$$

$$
= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos au \left(\quad \cdots \quad \right) du < 0
$$

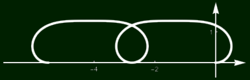
問題 6-1; $b = 1$

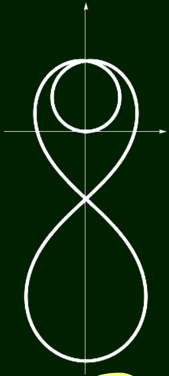
$a = 0$　　$\kappa = 1$

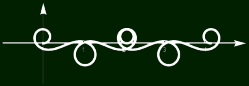


$F'(0) < 0$

$F(2\pi) > 0$







$a = 1$　　$a \sim 3.83$　　$a = 5$

問題 6-2

問題

定数 $a \in [0, 1]$ に対して，周期 2π の曲線
$\gamma_a(s) = (1 - 2a\sin s)^t(\cos s, \sin s)$ の全曲率を求めなさい．

$a \to \infty$

全曲率は相似変換で不変

2回転の円

$$\frac{1}{a}\gamma_a = \left(\frac{1}{a} - 2\sin s\right)\begin{pmatrix}\cos s \\ \sin s\end{pmatrix}$$

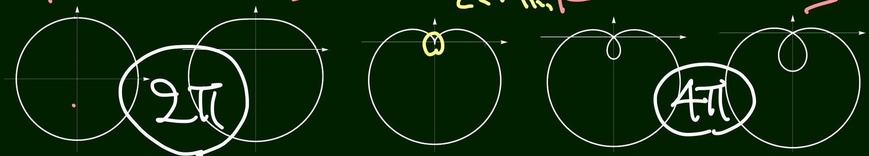
$$\xrightarrow{a \to \infty} \begin{pmatrix}-2\sin s\cos s \\ -2\sin^2 s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin 2s \\ \cos 2s - 1\end{pmatrix}$$

問題 6-2

全曲率不変

とくい点

不変



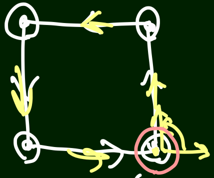
$a=0$ $a=\frac{1}{4}$ $a=\frac{1}{2}$ $a=\frac{3}{4}$ $a=1$

全曲率：正則ホモトピー同値なら同じ

("連続な変形で不変" 特異点をもたない)

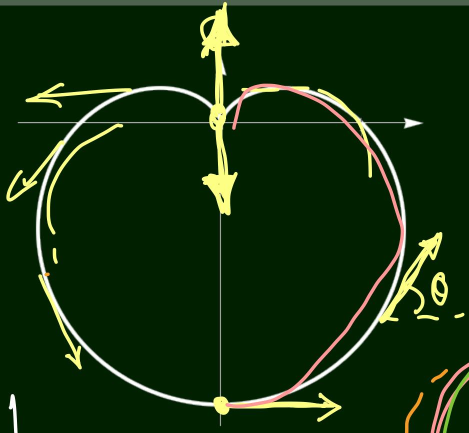
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{8a^2+1-6a\sin s}{4a^2+1-4a\sin s}\,ds \qquad \left(\tan\frac{s}{2}=t\right)$$

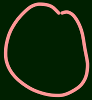
問題 6-2; $a = 1/2$



全曲率 0

回転数 1





Gauss 写像

全曲率 $\theta(L) - \theta(0)$

$= 3\pi$.

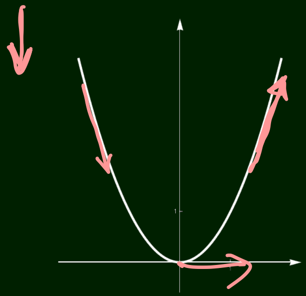
問題 6-3

問題

次の曲線の "全曲率" を求めなさい.

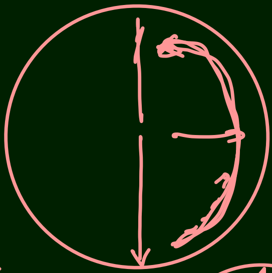
1. $\gamma_1(t) := {}^t(t, t^2)$ $(-\infty < t < \infty)$.
2. $\gamma_2(t) := {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(0 < t < \infty)$.

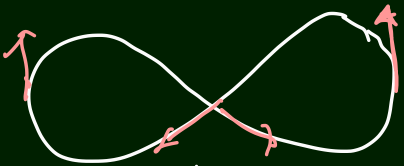
問題 6-3 (1)

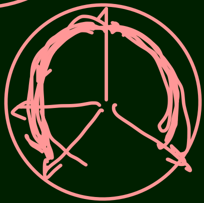


π

$$\int_0^L k(t)\,\overbrace{|\dot{\gamma}(t)|\,dt}^{ds}$$

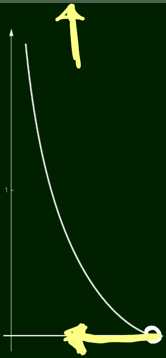


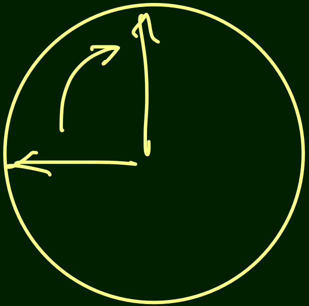




回転数　逆向 0

問題 6-3 (2)

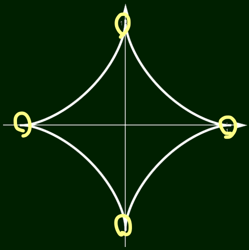




"回転数" が無限大？

全曲率: $-\frac{\pi}{2}$

問題 6-3



astroid

$(\cos^3 t, \sin^3 t) = \gamma(t)$

(全曲率 $= -2\pi$)

意味を考えよ