幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/18

問題 6-1

問題

定数 a, b に対して $\kappa(s) := a\cos s + b$ とおく．パラメータ s が弧長で曲率が $\kappa(s)$ となるような曲線を $\gamma_{a,b}$ とする．

(1). $\gamma_{a,b}$ が周期 2π の閉曲線ならば，b は整数であることを示しなさい．

(2). 与えられた整数 b に対して $\gamma_{a,b}$ が閉曲線となるような正の数 a は存在するか．

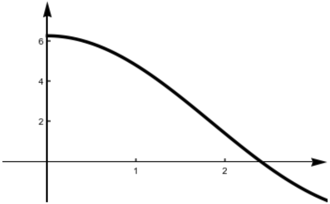
(2): 一般の b に対してはかなり煩雑．

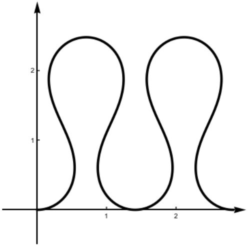
問題 2-2

問題

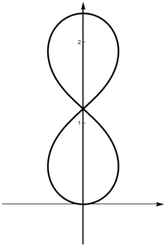
$\mathbb{R}$ 上で定義された，弧長 s をパラメータとする C^∞-級曲線 $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期 L (> 0) を持つとする．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ を満たすものが存在することを示しなさい．

問題 6-1; $b = 0$





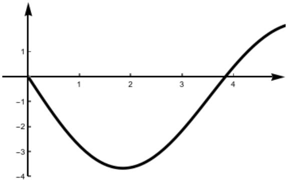
$a = 2$

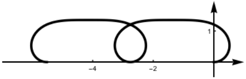


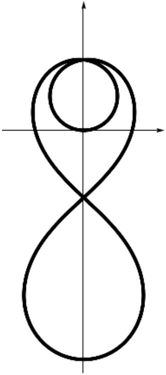
$a \sim 2.4$

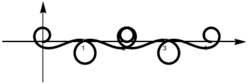
$a = 4$

問題 6-1; $b = 1$









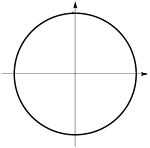
$a = 1$ $\qquad$ $a \sim 3.83$ $\qquad$ $a = 5$

問題 6-2

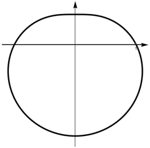
問題

定数 $a \in [0,1]$ に対して，周期 2π の曲線
$\gamma_a(s) = (1 - 2a\sin s)^t(\cos s, \sin s)$ の全曲率を求めなさい．

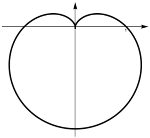
問題 6-2



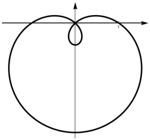
$a = 0$



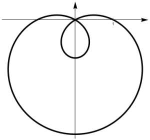
$a = \frac{1}{4}$



$a = \frac{1}{2}$

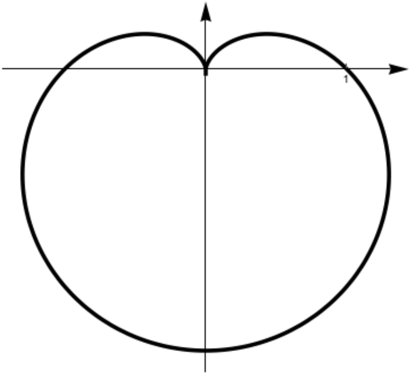


$a = \frac{3}{4}$



$a = 1$

問題 6-2; $a = 1/2$



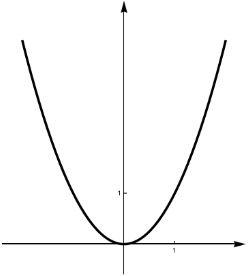
問題 6-3

問題

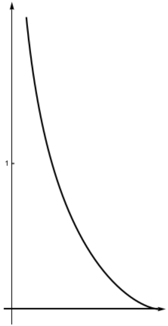
次の曲線の “全曲率” を求めなさい.

1. $\gamma_1(t) := {}^t(t, t^2)$ $(-\infty < t < \infty)$.
2. $\gamma_2(t) := {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(0 < t < \infty)$.

問題 6-3 (1)



問題 6-3 (2)



問題 6-3