幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/18

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

$\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，点 $\mathrm{P} = {}^t(p_1, \ldots, p_n) \in U$ において

$$F(\mathrm{P}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P}) \neq 0$$

を満たすならば，U における P の近傍 V，$\mathbb{R}^{n-1}$ における $\widetilde{\mathrm{P}} := {}^t(p_1, \ldots, p_{n-1})$ の近傍 W，および C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，次を満たす：

$$\{\mathrm{Q} \in V\,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\}$$
$$= \left\{ {}^t(x_1 \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))\,;\, {}^t(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in W \right\}.$$

$x_n = f(x_1 \cdots x_{n-1})$

というグラフで表示．

$\mathbb{R}^2$ 　 $F: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ の等高線

$\{ {}^t(x, y) ; F(x, y) = 0 \}$

$F^{-1}(\{0\}) = F^{-1}(\{0\})$

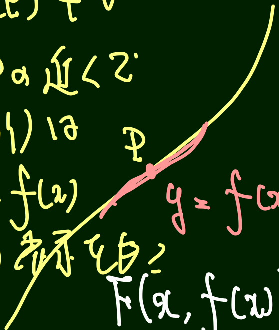
$F_y(P) \neq 0$

$\Rightarrow$ Pの近くで

$F^{-1}(\{0\})$ は

$y = f(x)$

という表示をもつ



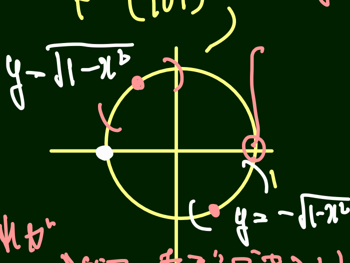
$F(x, f(x)) = 0$

$0 = \frac{d}{dx}\left(F(x, f(x))\right)$

$= F_x + f'(x) \boxed{F_y}$ 　 $\neq 0$

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$F^{-1}(\{0\})$



これがいつグラフ表示できるか!

なめらかな曲線 1

- $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 C が，
  自己交叉のないなめらかな曲線であるとは，任意の $\mathrm{P} \in C$ に対して $\mathbb{R}^2$ における P の近傍 V が存在して，$C \cap V$ が，ある区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{(x, f(x))\,;\, x \in J\}$ と合同となることである．

定理

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $C := F^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{P} \in U\,;\, F(\mathrm{P}) = 0\} \neq \emptyset$ とする．C 上の各点 P で $dF(\mathrm{P}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P})\right) \neq \mathbf{0}$ が 成り立つならば S は自己交叉をもたないなめらかな曲線である．

y

$y = x^3$ のグラフ　なめらかな曲線

なめらかな曲線 → $y = \sqrt[3]{x}$: 微分可能でない関数のグラフ

$$dF(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \underline{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)(p) \neq (0,0)$$

$$\begin{cases} F_y \neq 0 & \rightarrow \quad y = f(x) \text{ とかける} \\ F_x \neq 0 & \rightarrow \quad x = g(y) \text{ とかける.} \end{cases}$$

<u>Rem</u> 逆は成立しない.

きれいな曲線

$$F(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$$

$$C = F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \ ; \ x^2+y^2=1\}$$

$$dF = (F_x, F_y) = 2\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{C\text{上で}\,0}(2x, 2y)$$

なめらかな曲線 2

- 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級写像 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ表示されたなめらかな曲線であるとは，各 $t_0 \in J$ に対して t_0 を含む区間 $J' := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$（$\varepsilon > 0$）が存在して $\gamma(J')$ が自己交叉のないなめらかな曲線となることである．

定理

曲線の正則パラメータ表示 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ はパラメータ表示されたなめらかな曲線を与える．

例

とくい点の概念がことなる

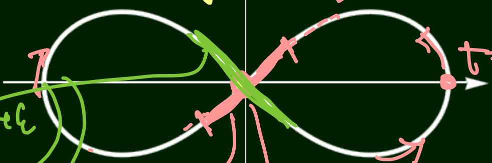
$F_1(0,0)=0$ 陰関数表示　　パラメータ表示

○ $F_1(x,y) = (x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$, $\qquad \gamma_1(t) = \left(\dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \dfrac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$

$dF_1 = \left(2x\left(2(x^2+y^2)-1\right), 2y\left(2(x^2+y^2)+1\right)\right)$

$dF_1(0) = (0,0)$

とくい点



$t=0$

$\gamma_1\left(\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon, \frac{3}{2}\pi+\varepsilon\right)\right)$

$\gamma_1\left(\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)$

$t=\frac{\pi}{2}$

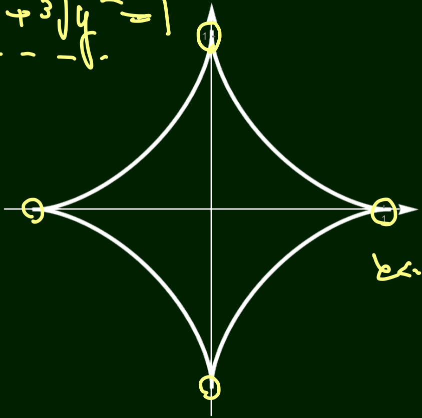
正則曲線

例

astroid

$$F_2(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2, \qquad \gamma_2(t) = {}^t\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right).$$

$\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{y}^2 = 1$



とがり点

陰関数の微分公式

$F\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$: C^∞-級；$\mathrm{P} = (x_0, y_0) \in U$

- $F_y(\mathrm{P}) \neq 0$ なら P の近傍で $\{F(x,y)=0\}$ は $y = f(x)$ とグラフ表示できる.

定理

この状況で

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つ. ただし F_x, ...は $(x, f(x))$ における値を表す.

$$F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

$$\frac{d}{dx} F_x(x, f(x)) = F_{xx}(x, f(x)) + f'(x) F_{xy}(x, f(x))$$

$$f''(x) = \frac{-F_{xx}F_y^2 + 2F_{xy}F_xF_y - F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

平面曲線の曲率

曲線の向きを定めない

系

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $C := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ かつ C 上の各点で $dF \neq \mathbf{0}$ を満たすとき，自己交叉をもたないなめらかな曲線 C の点 ${}^t(x, y)$ における曲率の絶対値は次で与えられる：

$$\frac{|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}^{\,3}}.$$

$x = g(y)$

$$y = f(x) \Rightarrow |\kappa| = \left| \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^{\,3}} \right|$$

最終回です

ご聴講ありがとうございました.

学修アンケートにご協力ください.