幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/11/18 (2021/11/11 訂正)

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

$\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，点 $\mathrm{P} = {}^t(p_1, \dots, p_n) \in U$ において

$$F(\mathrm{P}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P}) \neq 0$$

を満たすならば，U における P の近傍 V，$\mathbb{R}^{n-1}$ における $\widetilde{\mathrm{P}} := {}^t(p_1, \dots, p_{n-1})$ の近傍 W，および C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，次を満たす：

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{Q} \in V \,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} \\ &= \left\{ {}^t\bigl(x_1 \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})\bigr) \,;\, {}^t(x_1, \dots, x_{n-1}) \in W \right\}. \end{aligned}$$

なめらかな曲線 1

- $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 C が,
  自己交叉のないなめらかな曲線であるとは，任意の $\mathrm{P} \in C$ に対して $\mathbb{R}^2$ における P の近傍 V が存在して，$C \cap V$ が, ある区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{(x, f(x))\,;\, x \in J\}$ と合同となることである.

定理

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $C := F^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{P} \in U\,;\, F(\mathrm{P}) = 0\} \neq \emptyset$ とする．C 上の各点 P で $dF(\mathrm{P}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P})\right) \neq \mathbf{0}$ が 成り立つならば S は自己交叉をもたないなめらかな曲線である.

なめらかな曲線 2

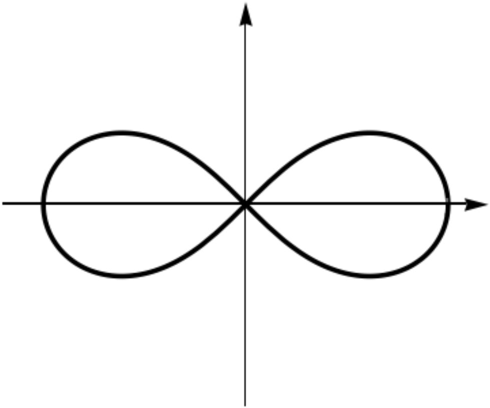
- 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級写像 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ表示されたなめらかな曲線であるとは，各 $t_0 \in J$ に対して t_0 を含む区間 $J' := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$（$\varepsilon > 0$）が存在して $\gamma(J')$ が自己交叉のないなめらかな曲線となることである．

定理

曲線の正則パラメータ表示 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ はパラメータ表示されたなめらかな曲線を与える．

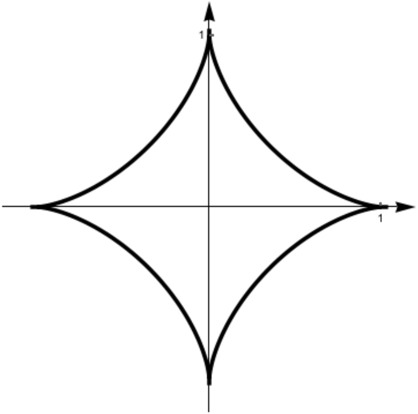
例

$$F_1(x,y) = (x^2+y^2)^2-(x^2-y^2), \qquad \gamma_1(t) = {}^t\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$$



例

$$F_2(x,y) = (1-x^2-y^2)^3 - 27x^2y^2, \qquad \gamma_2(t) = {}^t\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$$



陰関数の微分公式

$F\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$: C^∞-級；$\mathrm{P} = (x_0, y_0) \in U$

- $F_y(\mathrm{P}) \neq 0$ なら P の近傍で $\{F(x, y) = 0\}$ は $y = f(x)$ とグラフ表示できる．

定理

この状況で

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つ．ただし F_x, …は $(x, f(x))$ における値を表す．

平面曲線の曲率

系

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $C := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ かつ C 上の各点で $dF \neq \mathbf{0}$ を満たすとき，自己交叉をもたないなめらかな曲線 C の点 ${}^t(x, y)$ における曲率の絶対値は次で与えられる：

$$\frac{|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}^3}.$$