2021年11月18日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 7

■お知らせ

- 43名から課題の提出がありました（11月15日07:00 JST）.
- 次回は定期試験です．毎回の演習問題は一応目を通しておいてください.

■前回の補足

- 問題 6-1 (2)（曲率が $a\cos s + b$ となる曲線が閉曲線となる条件）は，与えられた整数 b に対して

$$F(a) := \begin{cases} \int_0^{\pi/2} \cos(a\sin s)\cos bs\,ds & (b \text{ が偶数のとき}) \\ \int_0^{\pi/2} \sin(a\sin s)\sin bs\,ds & (b \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおいたとき $F(a) = 0$ となることである．そのような a の存在は中間値の定理を用いて示すが，一般の b に対してこれは困難なようです（申し訳ありません．チェック不足です）．$b = 0, 1$ くらいの解説を行います.

■前回までの訂正

- 追試験の日程：12月3日（木）⇒ 12月2日（木）
- 映写資料 C の表紙，訂正の日付：2021/11/04 ⇒ 2021/11/14 というご指摘がありましたが，それでは未来の日付です．2021/11/11．講義直前に変更しました.
- 20211111-黒板 B，6 ページ：$\sqrt{1-\xi} = 1 - \frac{1}{2}\xi + o(\xi^2) \Rightarrow \sqrt{1-\xi} = 1 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + o(\xi^2)$

■授業に関する御意見

- 山田先生はさけびちゃんが好きなのですか？ なぜ好きなのですか？ よく映るので気になりました． **山田のコメント：** オンライン講義はひとりで寂しいので.
- チンアナゴの日は初耳でした． **山田のコメント：** でしょ.
- 11月11日は記念日が多いそうです．2021/11/11 は「Nobody's fault」の MV 公開から丁度1年たった日です． **山田のコメント：** なるほど．電池の日や独身の日でもありますね.
- いつも計算過程を詳しく書きすぎてスペースが狭かったので，今回は少し省略を多めにしてみました．また，ポッキー（チンアナゴ）の日ということで，ポッキーを食べながら回答を書いていましたが，紙にチョコがついてしまい，1枚まるまる書き直しになってしまいました．僕も早くタブレットで答案が書けるようになりたいです． **山田のコメント：** 便利だよ.
- 6-2 の γ_a が a によってどう変化するかみてみたい． **山田のコメント：** テキスト 31 ページ.
- 6-2 の積分大変でした． **山田のコメント：** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \pi/|a|$ だけでは？
- 問題 6-3 で全曲率をの（原文ママ）"全曲率" と強調していたのはなにか裏事情があるのしょうか？ **山田のコメント：** 閉曲線に対して全曲率を定義したのでそれ以外の「いわゆる全曲率」の意味.
- 自己交叉で mod が出てきて，珍しいなと思った． **山田のコメント：** よく使うよ.
- 曲率の積分が回転数 $\times 2\pi$ となるのが非自明で面白い性質だと思った.
  山田のコメント： コメントを文字通りにとると，回転数の定義から自明だと思うが，たぶんもう少し違うことを言いたいのですよね.
- 今回は月曜になる前に提出することができそうです． **山田のコメント：** ヨシ!
- なんとか締切に間に合いました． **山田のコメント：** Congrats!

■質問と回答

質問 1： 閉曲線を $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ かつ $\gamma(0) = \gamma(L)$ と定義するのでは $t = 0, L$ で $\gamma(t)$ が特異点をもつかもしれないからダメだということですか？ **お答え：**微分可能かどうかもわからないですね.

質問 2： 「周期 L の閉曲線」「自己交叉」「単純閉曲線」の定義によれば，周期 L の単純閉曲線 γ は周期 $2L$ の閉曲線でもあり，このとき γ は自己交叉をもつ（i.e. 単純閉曲線でない）；hence 自己交叉の有無は与える周期に依存するということでしょうか．／閉曲線の定義では γ が周期 L の閉曲線であるとき，γ は周期 $2L$ の閉曲線にもなります．このときに任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + L)$，$t_0 + L - t_0 = L \not\equiv 0 \pmod{2L}$ より γ を周期 $2L$ の閉曲線とみたとき，各 $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma(t_0)$ は閉曲線 γ となると思います．合ってますか． **お答え：**はい.

質問 3： 講義資料 6，6.2 の主張は「閉曲線の回転数は整数である」というものですが，ここでの閉曲線は「弧長パラメータ表示による閉曲線」「正則な閉曲線」のどちらでしょうか．（後略） **お答え：**後者．全曲率が定義されるのは正則な閉曲線のみなので，ステートメントには正則を入れていない.

質問 4： 全曲率は向きを考えてどちらに曲がったかを表すものだとおもいますが，向きを考えない $\int_0^L |\kappa(s)|\,ds$ を考えることはありますか？ **お答え：**名前がついていて「絶対全曲率」といいます．たとえば `http://hdl.handle.net/2433/255076`.

質問 5： 回転数を定義するときに 0 以上の値だけでなく負の値をもつように定義したのはなぜですか？

お答え： 左回りの円（回転数 1）と右回りの円（回転数 -1）は正則ホモトピー同値でないがこれを区別したい.

質問 6： 回転数は曲線が反時計周りのときいに正，時計周りのときに負になると思うのですが，これは曲率 κ の定義による影響でしょうか． **お答え：**はい.

質問 7： すでに解説済みかもしれませんが，全曲率の定義式の κ に絶対値がついていないということは，負の回転数も考えるということでしょうか． **お答え：**はい.

質問 8： 回転数は C^1 級座標変換で不変ですか？ どのように κ が変わるのか分からず，示し方が分かりません（直感的には成り立ちそう）．座標変換できる 2 曲線は正則ホモトピー同値になりそうなので，結局ホイットニーの定理（の逆？）に含意されるのでしょうか． **お答え：**κ は曲線が C^2-級でなければ定義できませんが θ（接線の偏角）は C^1-級でも定義できますね．後半は「座標変換全体が連結」ならばそうですが，向きを反転する座標変換では回転数が変わってしまいませんか？

質問 9： 正則ホモトピー同値の $\sigma_\alpha(t)$ について $\forall\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ に対して σ_{α_1} と σ_{α_2} の回転数は等しいと思います．ゆえに問題 6-2 の $0 \leqq a < \frac{1}{2}$ では a にかかわらず回転数が等しいので，$0 \leqq a < \frac{1}{2}$ では全曲率は $a = 0$（円）の時の 2π に等しいと言えますか？/ 回転数の不変性から 6-2 の解法を別に用意しました．宜しければ添削・修正くださるとありがたいです． **お答え：**はい．

質問 10： 「γ_1 と γ_2 が正則ホモトピー同値であるとき，自己交叉の数は等しい」は正しいでしょうか．

お答え： いいえ．輪ゴムをなめらかに変形して自分をまたぐようにできますね．

質問 11： 講義資料の “なめらかな変形で移り合う” ことの定義で C^∞-級写像の始域が $[0,1] \times \mathbb{R}$ となっていますが，これは $\alpha = 0$ や $\alpha = 1$ でも任意の正の整数 n について n 回片側微分可能であるということでしょうか．

お答え： この場合はそのつもりですが，α に関しては連続性のみが必要です．

質問 12： 定義 6.3 では σ を C^∞-級としていますが，α についても C^∞-級である必要はあるのですか？ 命題 6.4 の証明では α についての連続性のみを用いているので気になったのですが，α についての微分可能性に関わる定理があるのでしょうか．

お答え： おっしゃるとおり，α について連続で十分です．

質問 13： 講義資料 6, 定義 6.3 では σ_α の周期が L であることを条件にしているが，教科書 p. 29 の正則ホモトピー同値では周期についての言及がないのはなぜですか？ **お答え：**閉曲線の族 $\sigma_t\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ とありますので，これが周期についての言及です．

質問 14： 正則曲線を変形させることで周期 L が変化するような場合も存在するのか． **お答え：**はい．

質問 15： 命題 6.4 の証明において $\sigma_\alpha(t)$ の回転数が α の連続関数となる根拠を教えて頂きたいです． **お答え：**積分と極限の交換．

質問 16： 講義では全曲率や回転数は正則閉曲線に対して定義されていましたが，アステロイドのような正則でない閉曲線について全曲率や回転数のようなものを考えたいときは広義積分を考えればよいでしょうか． **お答え：**たとえば問題 6-2 の $a = \frac{1}{2}$ では？

質問 17： 今回は問題 6-2 の $\gamma_{1/2}$ について考えたことを質問します．$\gamma_{1/2}$ は $s = \frac{\pi}{2}$ のときの一点で特異点をもち，曲率 $\kappa(\frac{\pi}{2})$ が定義できません．しかし $\kappa(s)$ は零集合上で定義できなーいだけなので $\int_0^{2\pi} \kappa(s)\,ds$ はルベーグ積分として計算できると思います．実際，$\gamma_{1/2}$ の場合は 3π になりました．このように曲率がほとんどいたるところで定義できる曲線についても “全曲率” が定義できると思いました．幾何学で似たようなことを考えることはありますか？

お答え： つまらないことだが「ルベーグ積分で考える」は「広義積分で考える」という方が適切．はい，この場合，回転数と全曲率が違う概念になったりします．アステロイドは全曲率 -2π，回転数 -1 となりますが，凸多角形の全曲率は 0，回転数は ± 1 です．

質問 18： 特異点をいくつか持つ閉曲線（アステロイドなど）について，その “全曲率” を「特異点を端点とした曲率の広義積分の和」として定義できないものでしょうか？ 定義できないとしたらどのような不具合があるのでしょうか．

お答え： 定義してよいです．広義積分が収束しない場合は全曲率が存在しない，ということで問題ないですね．

質問 19： 特異点のない $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ をつなげてできる閉曲線にも，各曲線の曲率の積分を合計することで，全曲率を定義できると思いますが，この場合もホモトピー同値等の性質は成り立つのですか？ **お答え：**正則ホモトピー同値が定義できますか？

質問 20： 正則でない曲線（例えばアステロイドなど）も移り合うような変形を考えることはありますか？ **お答え：**はい．

質問 21： 閉曲線の定義が C^∞-級だったのでカージオイドの全曲率が定義できませんでした（山田注：たぶん「全曲率の定義が正則曲線に対してだったので」では？）図を書くと回転数が $\frac{3}{2}$ になると思えるのですが，C^∞-級でない場合でも全曲率や回転数（の拡張）を適切に定義する方法はありますか． **お答え：**C^∞-級と正則の区別をつけよう．カージオイドは写像としては C^∞-級です．

質問 22： 6-2 ではパラメータ a によって変形するさいに，$a = \frac{1}{2}$ で正則でない曲線をまたいだことによって回転数が 1 ふえましたが，2 以上ふえる例などもあるのでしょうか． **お答え：**同じような特異点を 2 つ以上もたせる．

質問 23： （図略：円）これは回転数 1 であり，（図省略；二周りの円）これは回転数 2 ですが，カーデオイドのような左（図省略）の図形は回転数が 1 と 2 の間ということでしょうか？ それともそもそも定義できないのでしょうか？

お答え： 全曲率は計算してみましたか？ もちろん今回の定義の範疇には入っていませんが．

質問 24： C を正則閉曲線の集合，$\sim$ を正則ホモトピー同値の定める同値関係とすると，講義資料より回転数を与える写像 $i\colon C \to \mathbb{Z}$ から誘導される $\tilde{i}\colon C/\sim \ni [\gamma] \mapsto i_\gamma \in \mathbb{Z}$ は全単射である．このとき，「$\gamma_1 \sim \tilde{\gamma}_1$ かつ $\gamma_2 \sim \tilde{\gamma}_2 \Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2 \sim \tilde{\gamma}_1 \sim \tilde{\gamma}_2$」を満たす $*\colon C \to C$ で $*$ から誘導される $\tilde{*}\colon C/\sim \times C/\sim \to C/\sim$ について $C/\sim$ が群になり，この群構造について $\tilde{i}$ が群同型となるような $*\colon C \times C \to C$ は存在しますか？ 単位円を n 周する閉曲線と m 周する閉曲線に $n + m$ 周する閉曲線を対応させればいいので $\gamma \in C$ の周期を $L, \tilde{\gamma} \in C$ の周期を $\tilde{L}$ としたとき $\gamma * \tilde{\gamma}$ を γ と $\tilde{\gamma}$ をつなげた周期 $L + \tilde{L}$ の閉曲線とすればいいのではないかと考えたのですが，γ と $\tilde{\gamma}$ をつなげた点で C^∞-級にならない場合があることに気が付きました．また $\tilde{i}$ が環同型になるような $C/\sim$ の和と積を C 上の演算から誘導することはできますか？

お答え： 前半：ほぼ正しくて，γ と $\tilde{\gamma}$ のつなぎ目は十分短い区間を修正することで C^∞-級にできます．テキスト 238 ページあたり．後半：よく知らない．ループのホモトピー類が成す群（基本群）にはさまざまな演算が定義される．

質問 25： 曲率と自己交叉の関係について（中略）．次のことが予想できた．「$\kappa(s)$ が狭義単調増加（減少）のとき $\gamma(s)$ は自己交叉をもたない」（後略）． **お答え：**はい，そのとおりです．テキスト §4「うずまき線の幾何」で扱っています．

質問 26： 回転数 0 の平面曲線は必ず自己交差を持つのでしょうか？ レムニスケートの交差を外すように何度か変形を試みましたが，特異点が出現して失敗に終わりました． **お答え：**テキスト 31 ページ，定理 3.2.

質問 27： 正則閉曲線では回転数が 0 のとき自己交叉が最低 1 つ，回転数が $k > 0$ のときは自己交叉が最低 $k - 1$ こ，回転数が $k < 0$ のときは自己交叉が最低 $-k - 1$ こ必要になりそうな気がしますがこれは正しいでしょうか．

お答え： どうしてそうなると思います？ テキスト 37 ページ，定理 3.4.

質問 28： 問題 6-3 の答えは「これらの曲線は閉曲線でないので全曲率は定義できない」となると思うのですがどうなのでしょう．（後略） **お答え：**なので引用符付きの “全曲率” とした．どう定義するか考えて計算せよ，というつもり．

質問 29： 閉曲線でない曲線（今回の 6-3 のような）の “全曲率” や “回転数” にはどのような意味があるのでしょうか．

お答え： 単位接ベクトルが単位円を何回まわるか．

質問 30： 6-3 で “回転数” を求めると $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{4}$ となり整数ではないにしろ（個人的に）きれいな値だと思いました．この値は（閉曲線でないときは）無理数になることもあるのでしょうか． **お答え：**はい．

質問 31： 問題 3, 1 の二次関数の “全曲率” (原文ママ；関数の全曲率とはなにか．放物線の全曲率ではないか？) が π なのは回転数が $\frac{1}{2}$，つまり原点を極としてはかった角が π だけ変化することを示していると考えてよいのでしょうか． **お答え：**考えている放物線は原点を通るので，その点で「角」は定義できません．ひょっとして違ったことを言いたかったのかも知れませんが．

質問 32： 講義中では周期をもたない関数（原文ママ；曲線のことか）(ex: $\gamma(t) = {}^t(t, t^2)$ など）が定義されていない（見逃していなければ）なのですが（原文ママ；「全曲率」が定義されていない，ということ？）このような場合の全曲率は曲率は（原文ママ；曲率を）区間全体で積分した値ですか．また，なめらかな変形がよくわからなかったのですが，問題 6-2 で a を 0 から 1 に変化させるとき回転数が変わるのは $a = 0.5$ のときに正則でなくなるからで，もし常に正則でない（原文ママ；正則である？）なら回転数が一致するということでしょうか． **お答え：**修正をした内容について「はい」．

質問 33： 6-3 のように周期が存在しない（周期が ∞?）の曲線の中でも（曖昧な表現ですが）途切れている曲線は十分に回転できないので回転数が整数にならない，もっといえば 1 未満になる場合がある，ということでよろしいでしょうか． **お答え：**はい．

質問 34： 6-3 の “回転数” はそれぞれ 1/2, −1/2（原文ママ；後者は −1/4）となるが，これはこれは $\dot\gamma_1$ は $t \to -\infty$ で下向きでゆるやかに左（曲率が正）の向きに曲がり $t \to \infty$ で上を向く左向きに振り返る動きを反映していますか？ この解釈だと γ_2 も上から右に 1/4 回転したのち左から上に 1/4 回転して系 −1/2 回転と納得がいきます． **お答え：**はい/γ_2 の定義域に注意．

質問 35： 今回の 6-2 を複素解析でごり押ししてしまいました．想定解法は $x = \tan\frac{s}{2}$ と変換する方法でしょうか．（この変換で求めることは可能）． **お答え：**はい．

質問 36： レムニスケートの回転数が 0 になるのは計算するとそうなるにしても，直感的にはどう解釈すればよいのでしょうか．

お答え： 方向ベクトルをまわしてみよう．

質問 37： 閉曲線を結び目の射影と考えることができると思いますが，正則ホモトピー同値の考えは結び目理論でも使うでしょうか．

お答え： はい．

質問 38： 1 年生の専門科目で「結び目理論入門」というサブタイトルの講義を受けました．そこでやった「ひねり数」という概念が今回やった「回転数」とどこかで似ている印象を受けたのですが，これらの間に何か関係がありますか？

お答え： テキスト §3 に似た概念がありますね．

質問 39： 2 次元平面（原文ママ；白い白馬のような）では，曲率を用いて全曲率が定義されていましたが，3 次元空間では例えば曲率を用いて 1 次元の “全曲率” (山田注：ひょっとして “3 次元” と読むのか？）が定義されることはありますか？

お答え： たとえば質問 4 の回答にある文献など．

質問 40： 空間曲線に平面曲線と同様に回転数や正則ホモトピー同値を定めると，回転数は常に正になります．しかし，正則ホモトピー同値な二つの空間曲線をある平面に射影すると，平面曲線同士では回転数が異なる自体が生じ得ると思います．空間曲線ではどうやって正則ホモトピー同値を定めるのですか？

お答え： 正則ホモトピー同値の定義は同じ．しかし全曲率は 2π の整数倍とは限らないので一般に回転数は定義できない．

質問 41： 空間曲線で閉曲線を表すとどうなるのでしょうか？ 全捩率などが入るのでしょうか？

お答え：「空間曲線で閉曲線を表す」というフレーズの意味がわかりません．

質問 42： 問題 6-1 ですが，$\gamma_{a,b}$ の周期によって a が $\gamma_{a,b}$ を閉曲線にするかどうかが変わって，2 を議論するのに少し「あれ？」という感じがしました．これで良いのでしょうか． **お答え：**たぶん良くないです．ここでは周期を 2π に限りましょう．さらに回転数が整数であるなら閉曲線になる，という議論をしていませんか？ それは間違いです．

質問 43： 枠の分布に関する関数 (...略；フルネの方程式を離散化してといてみてくれました).
$(e(s), n(s)) = (e(s_0), n(s_0))\left[I + \int_{\tau=s_0}^{\tau=s_1} \Omega(\tau)\,d\tau\right]$．最後に得られる上記の式には問題ないですか？

お答え： 問題あります．左辺が直交行列になりません．離散化の各段階で枠が $\mathrm{SO}(2)$ に入るように工夫する必要があります．

質問 44： 回転数，全曲率から曲率 γ を決定付けられますか？

お答え： 曲線 γ でしょうか？ もし決定づけられるとすると，閉曲線全体が $\mathbb{Z}$ と 1 対 1 に対応してしまいますが．

質問 45： 正則ホモトピー同値は同相写像による同値関係のようなものですか？

お答え： ご質問の意味がわかりません．同相写像は「どこからどこへの」写像を考えていますか？

質問 46： 複素解析で特異点を閉曲線のまわりで積分しますが（山田注：文字通りに読むと意味がとれない．特異点を積分する，って何？）それを全曲率を用いて表すことはできますか． **お答え：**「それ」は何を指しますか？

7 陰関数定理

■陰関数定理 ここでは特別な場合の陰関数定理のステートメントを述べる．証明は解析学で学ぶ（はず）：

定理 7.1 (陰関数定理)**.** $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，点 $\mathrm{P} = {}^t(p_1, \dots, p_n) \in U$ において $F(\mathrm{P}) = 0$, $\partial F/\partial x_n(\mathrm{P}) \neq 0$ を満たすならば，U における P の近傍 V，$\mathbb{R}^{n-1}$ における $\widetilde{\mathrm{P}} := {}^t(p_1, \dots, p_{n-1})$ の近傍 W，および C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，次を満たす：

$$\{\mathrm{Q} \in V\,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} = \Big\{{}^t\big(x_1 \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})\big)\,;\, {}^t(x_1, \dots, x_{n-1}) \in W\Big\}.$$

注意 7.2. $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 C が，**自己交叉のないなめらかな曲線**であるとは，任意の $\mathrm{P} \in C$ に対して $\mathbb{R}^2$ における P の近傍 V が存在して，$C \cap V$ が，ある区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{{}^t(x, f(x))\,;\, x \in J\}$ と合同となることである．

また，区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級写像 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ表示された**なめらかな曲線**であるとは，各 $t_0 \in J$ に対して t_0 を含む区間 $J' := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ が存在して $\gamma(J')$ が自己交叉のないなめらかな曲線となることである．

定理 7.3. $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $C := F^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{P} \in U\,;\, F(\mathrm{P}) = 0\} \neq \emptyset$ とする．C 上の各点 P で $dF(\mathrm{P}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \neq \mathbf{0}$ が 成り立つならば S は自己交叉をもたないなめらかな曲線である．

定理 7.4. 曲線の正則パラメータ表示 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ はパラメータ表示されたなめらかな曲線を与える．

例 7.5.
- $F_1(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$; $F_2(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2$.
- $\gamma_1(t) = {}^t\left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}\right)$; $\gamma_2(t) = {}^t\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

■陰関数の微分

定理 7.6. 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が点 $\mathrm{P} \in U$ において $F(\mathrm{P}) = 0$ かつ $F_y(\mathrm{P}) \neq 0$ を満たすとき，P の近傍 V において $F^{-1}(\{0\}) \cap V$ は C^∞-級関数のグラフ $y = f(x)$ で表示される．このとき

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つ．ただし F_x, …はそれらの $(x, f(x))$ における値を表す．

> **証明：** 関数 f の与え方から $F(x, f(x)) = 0$．これを x で微分すると $F_x + F_y f'(x) = 0$．このことから第一の式を得る．さらに第一の式を x の一変数関数として微分すれば第二式が得られる．

系 7.7. 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $C := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ かつ C 上の各点で $dF \neq \mathbf{0}$ を満たすとき，自己交叉をもたないなめらかな曲線 C の点 ${}^t(x, y)$ における曲率の**絶対値**は次で与えられる：

$$\frac{|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}^{\,3}}.$$

2021 年 11 月 18 日