山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません).
- 試験終了後は, **解答用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **12 月 3 日**に T2SCHOLA (課題：定期試験 (11 月 25 日) 受験申込) へのフィードバックとして返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2021 年 12 月 10 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．b 上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.
- 成績は**試験**と**課題**の得点から以下で決定する：課題の得点の合計を $\boxed{x = 29}$点，課題得点のクラス最大値を $\boxed{x_{\max} = 29}$点，この試験の得点を y 点としたとき，

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\max}}\right) + py, \qquad p := 0.3 + 0.7a$$

で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**である.

綴じてある紙媒体 のみ持込可

問題 0　成績評価に用いる重み $a \in [0,1]$ の値は $a = \boxed{\ 0\ }$ とする（解答欄に記入；必須.).

問題 A　[55 点] 次の $\boxed{\ 1\ }$∼$\boxed{\ 17\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，下線 **a–d** の理由を述べなさい.

開区間 $J \subset \mathbb{R}$ で定義された空間曲線の弧長パラメータ表示 $\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ を考え，その単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$ $({}' = d/ds)$，単位主法線ベクトル・単位従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}(s)$，$\boldsymbol{b}(s)$ とする．曲率 $\kappa(s)$，捩率 $\tau(s)$ を用いれば

$$(*)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{e}'(s) &= \boxed{\ 1\ }\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 2\ }\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 3\ }\boldsymbol{b}(s),\\ \boldsymbol{n}'(s) &= \boxed{\ 4\ }\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 5\ }\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 6\ }\boldsymbol{b}(s),\\ \boldsymbol{b}'(s) &= \boxed{\ 7\ }\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 8\ }\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 9\ }\boldsymbol{b}(s) \end{aligned}$$

が成り立つ．いま，J 上の C^∞-級関数 λ を用いて $\tilde\gamma(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$ と定めると，その速度ベクトルは γ のフルネ枠 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ を用いて $\tilde\gamma'(s) = \boxed{\ 10\ }\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 11\ }\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 12\ }\boldsymbol{b}(s)$ と表される.
以下，次を仮定する：

(1) $\tilde\gamma$ は正則曲線.
(2) 各 $s \in J$ に対して $\tilde\gamma'(s)$ と $\tilde\gamma''(s)$ は一次独立.
(3) 各 $s \in J$ に対して $\tilde\gamma$ の単位従法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{b}}(s)$ は γ の単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ と平行.
(4) λ は零点をもたない.

すると，$\tilde{\boldsymbol{b}}$ は $\tilde\gamma'$ と直交するから，$_{\mathbf{a}}\underline{\lambda\text{ は零でない定数}}$である．さらに $\tilde\gamma$ の単位接ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{e}}(s) := \tilde\gamma'(s)/|\tilde\gamma'(s)|$, 単位主法線ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{n}}(s)$ とおくと，$_{\mathbf{b}}\underline{\tilde\gamma''(s)\text{ は }\tilde{\boldsymbol{e}}(s)\text{ と }\tilde{\boldsymbol{n}}(s)\text{ の線形結合で表される}}$.
一方 p $\tilde\gamma''(s) = \boxed{\ 13\ }\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 14\ }\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 15\ }\boldsymbol{b}(s)$ が成り立つので，γ の曲率 κ，捩率 τ，定数 λ は関係式 $\boxed{\ 16\ }$ を満たす．さらに $_{\mathbf{c}}\underline{\kappa,\ \tau\text{ はともに定数関数ではない}}$ が，とくに $J = (0,\infty)$，$\lambda = \frac{1}{2}$，$\kappa(s) = 1 + \operatorname{sech} s$，$\tau(s) = \boxed{\ 17\ }$ とすると，$_{\mathbf{d}}\underline{\text{これらは条件 (1)–(4) を満たす}}$ことがわかる.

学籍番号: 80709946	**氏名：山田光太郎**

問題 B [45 点] 次の $\boxed{18}$ 〜 $\boxed{28}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **e** を示しなさい．

原点を含む開区間 $J \subset \mathbb{R}$ で定義された C^∞-級関数 $f\colon J \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ が $f(0) = f'(0) = 0$ を満たしているとする．ただし $' = d/dx$．このとき，xy-平面上のグラフ $y = f(x)$ は，$\gamma\colon J \ni x \mapsto \boxed{18} \in \mathbb{R}^2$ とパラメータ表示される．この曲線の $x = 0$ における接線は $\boxed{19}$ で，γ の曲率関数 κ とその微分は

$$\kappa(0) = \boxed{20}, \qquad \mathbf{e}\ \underline{\frac{d}{ds}\kappa(0) = \boxed{21}}$$

と f を用いて表される．ただし s は γ の弧長である．このことから f の原点の周りの 3 次までのテイラー展開の係数は γ の曲率とその微分を用いて表すことができ，

$$f(x) = \boxed{22} + \boxed{23}\,x + \boxed{24}\,x^2 + \boxed{25}\,x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

が成り立つ．とくに，曲線 γ が接線 $\boxed{19}$ と原点において 2 次の接触をするための必要十分条件は，原点における γ の曲率が $\boxed{26}$ となることである．そうでないとき，y 軸上の点 ${}^t(0, a)$ を中心とし，原点を右向きに通過する円 C_a と γ が 2 次の接触をするための必要十分条件は $a = \boxed{27}$ となることである．このとき，円 C_a（$a = \boxed{27}$）と γ が 3 次の接触をするための必要十分条件は，曲率を用いて $\boxed{28}$ と表される．

問題 C [15 点] 次の C1–C4 のうち 1 つを選択して回答しなさい：

問題 C1: 弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ の曲率 κ が周期 L の周期関数で，定数でないものとする．このとき γ は周期 L の閉曲線となるか．理由をつけて答えなさい．

問題 C2: 正の定数 a に対して，周期 2π の閉曲線 $\gamma_a(t) := {}^t\bigl((1 - a\cos t)\cos t, (1 - a\cos t)\sin t\bigr)$ の全曲率をもとめなさい．

問題 C3: 放物線 $\gamma(t) = {}^t(t, t^2)$ の点 $\gamma(t)$ における曲率円の中心を $\sigma(t)$ とおく．曲線 $\sigma\colon t \mapsto \sigma(t)$ が特異点をもつような t の値を求めなさい．

問題 C4: 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $C := \{{}^t(x, y)\,;\, x^4 + y^4 - 1 = 0\}$ は自己交叉のないなめらかな曲線となる（このことは認めてよい）．曲率が 0 となる C の点をすべて求めなさい．

問題 D [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

参考：双曲線関数の性質

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x},$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$$

おつかれさまでした ♡

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 0 の解答欄

0	
1	成績評価のための重み $a \in [0,1]$ を指定する．指定がない場合は $a=1$．

問題 A の解答欄

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	κ	0	$-\kappa$	0	τ	0	$-\tau$	0

10	11	12	13	14	15
$1-\lambda\kappa$	λ'	$\lambda\tau$	$-\lambda\kappa'$	$\kappa-\lambda(\kappa^2+\tau^2)$	$\lambda\tau'$

16	17
$\kappa-\lambda(\kappa^2+\tau^2)=0$	$\tanh s$

下線 a の理由

$\tilde{\gamma}' = (1-\lambda\kappa)\boldsymbol{e} + \lambda'\boldsymbol{n} + \lambda\tau\boldsymbol{b}$ と $\tilde{\boldsymbol{b}} = \pm\boldsymbol{n}$ は直交するので，$0 = \tilde{\gamma}'\cdot\boldsymbol{n} = \lambda'$．したがって λ は定数．さらに条件 (4) より $\lambda \neq 0$．

下線 b の理由

$\tilde{\gamma}$ の弧長パラメータを u と書くと，

$$\tilde{\gamma}'' = \frac{d}{ds}(|\tilde{\gamma}'|\tilde{\boldsymbol{e}}) = \frac{d|\tilde{\gamma}'|}{ds}\tilde{\boldsymbol{e}} + |\tilde{\gamma}'|\frac{d}{ds}\tilde{\boldsymbol{e}} = \frac{d|\tilde{\gamma}'|}{ds}\tilde{\boldsymbol{e}} + |\tilde{\gamma}'|\frac{du}{ds}\frac{d}{du}\tilde{\boldsymbol{e}} = \frac{d|\tilde{\gamma}'|}{ds}\tilde{\boldsymbol{e}} + |\tilde{\gamma}'|\frac{du}{ds}\tilde{\kappa}\tilde{\boldsymbol{n}}.$$

下線 c の理由

関係式 $\boxed{16}$ より κ と τ の一方が定数ならばもう一方も定数．したがって，$\kappa' = \tau' = 0$ となり $\tilde{\gamma}'' = \boldsymbol{0}$ なので条件 (2) を満たさない．

下線 d の理由

$\kappa = 1 + \operatorname{sech} s$，$\tau = \tanh s$ ならば $\lambda = \frac{1}{2}$（自動的に (4) が成り立つ）とした関係式 $\boxed{16}$ が成り立つ．したがって

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{1}{2}(1-\operatorname{sech} s)\boldsymbol{e}(s) + \frac{1}{2}\tanh s\,\boldsymbol{b}(s), \qquad \tilde{\gamma}''(s) = \frac{1}{2}\tanh s\operatorname{sech} s\,\boldsymbol{e}(s) + \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2 s\,\boldsymbol{b}(s).$$

となるので (1)，(3) が成り立つ．さらに $\tilde{\gamma}'(s)\times\tilde{\gamma}''(s) = (1-\operatorname{sech} s)\boldsymbol{n}(s)$ なので，$s>0$ で (2) を満たす．

学籍番号: 80709946	氏名：山田光太郎

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄

18 $(x, f(x))$	19 x 軸	20 $f''(0)$	21 $f'''(0)$
22 0	23 0	24 $\frac{1}{2}\kappa(0)$	25 $\frac{1}{6}\frac{d\kappa}{ds}(0)$
26 $\kappa(0) = 0$	27 $\frac{1}{\kappa(0)}$	28 $\frac{\kappa(0)}{ds}(0) = 0$	

下線 e

弧長パラメータを s とすると $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, とくに $\frac{ds}{dx}(0) = 1$.
また $\kappa(s) = f''(x)/\sqrt{1+f'(x)^2}^3$ なので

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d\kappa}{dx} = \frac{dx}{ds}\left(\frac{f'''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3} - \frac{3}{2}\frac{f''(x)\cdot(2f'(x)f''(x))}{\sqrt{1+f'(x)^2}^5}\right)$$

だから $x = 0$ とすると右辺は $f'''(0)$ となる.

- 1–3, 4–6, 7–9, 10–12, 13–15, 16, 17 各 5 点
- 18, 19, 20, 21, 22–25, 26, 27, 28 各 5 点
- **a–e** 各 5 点

学籍番号: 80709946	**氏名：山田光太郎**

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

選択した番号を記入する.

C1: 閉曲線となるとは限らない. 実数 a に対して $\kappa_a(s)=a\cos s$ とするとこれは周期 2π の関数である. $\theta_a(s):=a\sin s$ とすると, 曲率 κ_a をもつ曲線は $\gamma_a(s)=\int_0^s {}^t(\cos\theta(u),\sin\theta(u))\,du$ と表される. とくに $\gamma_a(s+2\pi)=\gamma_a(s)+{}^t(\xi_a,\eta_a)$ が成り立つが $\xi_a=\int_{-\pi}^{\pi} a\sin s\,ds$ なので $\xi_0=2\pi\neq 0$ なので γ_0 は閉曲線でない. ξ_a は a の連続関数なので十分小さい $a\neq 0$ に対して γ_a は閉曲線でないが, κ_a は定数でない.

C2: $\boldsymbol{e}_1(t):={}^t(\cos t,\sin t)$, $\boldsymbol{e}_2(t):={}^t(-\sin t,\cos t)=\boldsymbol{e}_1'(t)$ とおくと $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ は正規直交系をなす. $\gamma_a(t)=(1-a\cos t)\boldsymbol{e}_1(t)$ なので $\gamma_a'(t)=a\sin t\boldsymbol{e}_1(t)+(1-a\cos t)\boldsymbol{e}_2(t)$. したがって $|\gamma_a'(t)|^2=a^2+1-2a\cos t=(a-1)^2+a\sin^2\frac{t}{2}$ だから $a=1$ のとき $t\equiv 0 \pmod{2\pi}$ に γ_a は特異点をもつが, それ以外では特異点をもたない. したがって $a\in(0,1)$ ($a\in(1,+\infty)$) で γ_a は互いに正則ホモトピー同値.

(1) $a\in[0,1)$ のとき, γ_a の全曲率は γ_0 と一致するが, これは左回りの単位円だから$\underline{2\pi}$.

(2) $a\in(1,+\infty)$ のとき, 全曲率は相似拡大・縮小で不変だから, $\frac{-2}{a}\gamma_a$ の全曲率と一致する. $a\to+\infty$ とすると $\frac{-2}{a}\gamma_a\to{}^t(2\cos^2 t,2\cos t\sin t)={}^t(\cos 2t-1,\sin 2t)$ は $0\leqq t\leqq 2\pi$ で円を左に 2 回まわるので全曲率は $\underline{4\pi}$.

C3: 進行方向の単位接ベクトルは $\boldsymbol{e}={}^t(1,2t)/\sqrt{1+4t^2}$, 左向き単位接ベクトルは $\boldsymbol{n}=(-2t,1)/\sqrt{1+4t^2}$, また曲率関数は $\kappa(t)=2/\sqrt{1+4t^2}^3$ なので, $\sigma(t)=\gamma(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t)={}^t(-4t^3,\frac{1}{2}+3t^2)$. これは $t=0$ に特異点をもつ.

C4: 点 $\mathrm{P}={}^t(x,y)\in C$ において $x^4+y^4=1$ が成り立つことに注意すると, 点 P における曲率の絶対値は $3x^2y^2/(x^6+y^6)^{3/2}$. したがって曲率が 0 になる点は $x=0$, $y=0$ となる点. すなわち $\underline{(\pm1,0),\ (0,\pm1)}$.

問題 D の解答欄

学籍番号: 80709946	氏名：山田光太郎