幾何学概論第二 (MTH.B212)

パラメータ変換・長さと面積

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/09 (2021/12/16 訂正)

準備：3 次元ユークリッド空間

$\mathbb{R}^3$: 3 次元ユークリッド空間.

- 内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$.
- ベクトルの大きさ（ノルム）$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$.
- 2 点の距離 $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$.

準備：等長変換

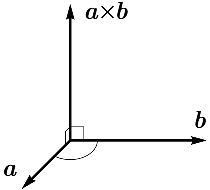
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が等長変換 $\Leftrightarrow d(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ （$\forall$P, Q）

- 3 次直交行列全体の集合：$\mathrm{O}(3)$.
- 3 次直交行列のうち行列式が 1 のもの全体：$\mathrm{SO}(3)$.
- f が等長変換 $\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ ($A \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)
- $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ ($A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)：向きを保つ等長変換.

準備：ベクトル積

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$



準備：ベクトル積

- 双線形
- 交代的
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が一次独立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a},\ \ \boldsymbol{b}$.
- $A \in \mathrm{SO}(3) \Rightarrow (A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.
- $A \in \mathrm{O}(3) \setminus \mathrm{SO}(3) \Rightarrow (A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = -A(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.
- $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.

準備：チェイン・ルール

- f:領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数
- $\gamma\colon \mathbb{R} \supset (a,b) \ni t \mapsto \gamma(t) = {}^t(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ ：C^∞
- $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$
$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) + \frac{dv}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t)).$$

すなわち

$$\dot{\hat{\gamma}} = (f_u, f_v)\dot{\gamma}$$

準備：チェイン・ルール

- $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset V \ni {}^t(\xi,\eta) \mapsto \varphi(\xi,\eta) = {}^t(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \in \mathbb{R}^2$：$C^\infty$
- $\gamma\colon \mathbb{R} \supset (a,b) \ni t \mapsto \gamma(t) = (\xi(t),\eta(t)) \in V$：$C^\infty$
- $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$.

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(*)\frac{d\xi}{dt}(t) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(*)\frac{d\eta}{dt}(t), \frac{\partial v}{\partial \xi}(*)\frac{d\xi}{dt}(t) + \frac{\partial v}{\partial \eta}(*)\frac{d\eta}{dt}(t)\right)$$

ただし $(*) = (\xi(t),\eta(t))$．すなわち

$$\dot{\tilde{\gamma}} = P\dot{\gamma}, \qquad \left(P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\right).$$

準備：チェイン・ルール

- f:領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数
- $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset V \ni (\xi,\eta) \mapsto \varphi(\xi,\eta) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \in \mathbb{R}^2$: C^∞
- $\tilde{f} = f \circ \varphi$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*) + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial v}(*)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*) + \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial v}(*)$$

ただし $(*) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$. すなわち

$$(\tilde{f}_\xi, \tilde{f}_\eta) = (f_u, f_v)P \qquad \left(P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\right)$$

準備：微分同相

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^2$ への全単射 $\varphi\colon U \to V$ が微分同相写像であるとは，φ と φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．これを座標変換ということもある．

定理 (逆写像定理)

- 微分同相写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to V \subset \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列は U の各点で正則行列．すなわちヤコビ行列式（ヤコビアン）は零でない．
- C^∞-級写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列点 $\mathrm{P} \in U$ で正則ならば，P の近傍 U' が存在して $\varphi|_{U'}\colon U' \to \varphi(U')$ は微分同相写像となる．

正則曲面

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級写像

$$p\colon U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

が曲面の正則パラメータ表示または正則曲面
$\Leftrightarrow$ U の各点 P において $p_u(\mathrm{P})$, $p_v(\mathrm{P})$ が一次独立

正則曲面

$$(x, y) \mapsto {}^t(x, y, f(x, y))$$

正則曲面

${}^t(x(t), z(t))$：xz 平面上の正則曲線；$x(t) > 0$

$p(u, v) = {}^t\big(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)\big)$