幾何学概論第二 (MTH.B212)

パラメータ変換・長さと面積

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/09 (2021/12/09 訂正)

パラメータ変換

$U, V \subset \mathbb{R}^2$：領域

- $p : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$: 正則曲面
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset V \to U \subset \mathbb{R}^2$：微分同相

主張

$\tilde{p} = p \circ \varphi$ は正則曲面

「$\tilde{p}$ は p からパラメータ変換で得られる」

曲面上の弧長

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma\colon [a,b] \to U$：C^∞
- $\hat{\gamma} := \tilde{p} \circ \gamma$.

定義

$$\mathcal{L}(\hat{\gamma}) := \int_a^b \left| \frac{d\hat{\gamma}}{dt} \right| dt$$

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt} = \dot{u} p_u + \dot{v} p_v = (p_u, p_v)\dot{\gamma}.$$

曲面上の弧長

主張

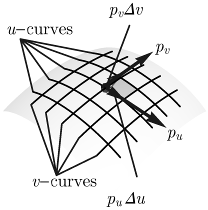
- 曲面上の曲線の弧長は $\mathbb{R}^3$ の等長変換で不変.
- 曲面上の曲線の弧長は曲面のパラメータ変換によらない.

曲面上の面積

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $D \subset U$, $\overline{D}$: 有界閉集合.

定義

$$\mathcal{A}_p(\overline{D}) := \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v| \, du \, dv.$$



曲面上の面積

主張

- 面積は $\mathbb{R}^3$ の等長変換で不変.
- 面積はパラメータ変換によらない.

問題 1-1

問題

領域 $D := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$ 上で定義された正則曲面
$p\colon D \ni (u, v) \mapsto p(u, v) := {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ に
$u = u(\xi)$, $v = \eta$ という形のパラメータ変換を施して,
$\tilde{p}(\xi, \eta) = p\bigl(u(\xi), \eta\bigr)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような
$\tilde{p}(\xi, \eta)$ を求めなさい.

問題 1-2

問題

正の定数 R に対して，$D=[0,\pi R]\times[-\pi,\pi]$ で定義された正則曲面 $p(r,\theta):=R\,{}^t\!\left(\cos\frac{r}{R}\cos\theta,\cos\frac{r}{R}\sin\theta,\sin\frac{r}{R}\right)$ を考える．
与えられた正の数 ρ に対して

$$
\begin{aligned}
S(\rho) &:= \{p(\rho,\theta)\,;\,-\pi\leqq\theta\leqq\pi\},\\
D(\rho) &:= \{p(r,\theta)\,;\,0\leqq r\leqq\rho,-\pi\leqq\theta\leqq\pi\}
\end{aligned}
$$

とおき，$S(\rho)$ の弧長を $\mathcal{L}(\rho)$, $D(\rho)$ の面積を $\mathcal{A}(\rho)$ とおく．このとき次の極限を求めなさい：

$$
\lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mathcal{L}(\rho)-2\pi\rho}{\rho^3},\qquad \lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mathcal{A}(\rho)-\pi\rho^2}{\rho^4}.
$$

問題 1-3

問題

正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$p(u,v) := {}^t\left(a\cos v\cosh\frac{u}{a}, a\sin v\cosh\frac{u}{a}, u\right)$$

で定める．正の数 δ に対して $S(\delta) := \{p(\delta, v)\,;\, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$, $D(\delta) := \{p(u,v)\,;\, -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$ とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい.