2021 年 12 月 9 日 (2021 年 12 月 16 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/` (この授業の公式ページ)
- `http://www.official.kotaroy.com/class/2021/geom-2/` (この授業のページ; ミラーサイト)
- `https://t2schola.titech.ac.jp/` (T2SCHOLA; 課題の提出，返却はこちら)

■科目名など　幾何学概論第一 (MTH.B212)（木曜日・3/4 時限・理学院数学系 ; 遠隔講義（教室割当: H112)）

■担当者　山田光太郎 (kotaro@math.titech.ac.jp)

■講義の概要　幾何学概論第一 (MTH.B211) に続き，主に以下の事項を学ぶ：正則曲面のパラメータ表示, 第一基本形式・長さ・角度・面積，第二基本形式・主曲率・Gauss 曲率・平均曲率，測地線，Gauss-Bonnet の定理，曲面論の基本定理の意味．古典的な曲面の微分幾何学の基本事項を身につけるとともに，現代の微分幾何学を学ぶための準備を行う．

■到達目標　3 次元ユークリッド空間内の曲面の微分幾何学の基本的な事項，とくに，曲面の曲率の概念と，その幾何学的な性質を学ぶ．(1) 曲面のパラメータ表示とパラメータ変換，パラメータによらない量の概念を知る．(2) 曲面の曲率と曲面の形状の関係を知る．(3) 曲面の大域的性質と局所的性質の具体例を知る．(4) 理論の具体例を計算によって確認する．

■教科書　**梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』(改訂版)（裳華房）**
正誤表：`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html`

■成績評価の方法

- 第 1 回から第 6 回までの授業で提示された**課題**を 1 回あたり 5 点満点で評価する．
- 定期試験期間中に**対面にて試験**（100 点満点）を行う（変更の可能性もある）．
  - 詳細は試験実施の 2 回前の講義の際に指示する．
  - 感染・濃厚接触・基礎疾患による登校の危険性の他，事故・病気・親族の不幸などで定期試験を受験できなかった場合**事前申し出により追試験**（オンラインを予定）を行う．

  試験を受験することは単位を得るための**必要条件**である (十分条件ではない)．
- 成績は**試験**と**課題**の得点から決定する．決定の方式は次の通り：課題の得点の合計を x 点 ($0 \leqq x \leqq 30$)，課題得点のクラス最大値を $x_{\max}$ 点，試験の得点を y 点としたとき，

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\max}}\right) + py, \qquad p := 0.3 + 0.7a$$

  で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする（予定）．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**である．

■課題とその評価方法

1 講義の際に提示する問題のうちから 1 問を選んで回答する．**２点満点**

2 講義内容，講義資料の**誤りの指摘**または**質問３点満点**．講義中に zoom のチャット機能を用いて指摘・質問をしてもよい．その際は提出用紙のチャットの欄にチェックを入れること．

- 評価基準（誤りの指摘）：基本点**２点**；単なる typo の指摘**１点**；論理・計算を追ってチェックしなければ見つからない誤りの指摘**３点**
- 評価基準（質問）：基本点**２点**；講義内容に寄与するもの・面白い視点のもの**３点**；回答がテキスト・資料の内容，回答に何を求めているか読み取れないものは**１点**；講義内容と無関係，高校生程度の誤認，講義中に指摘した内容，チャットでの指摘と同一内容，文として成立しないものは**０点**．
- 複数の質問・誤りの指摘はそのうち**最高点**のものを評価点とする．

■提出方法

- 所定の用紙（A4 版 2 枚）—提出用紙—に記入して PDF 形式で T2SCHOLA に提出．
- 講義 web ページ，T2SCHOLA に提出用紙の PDF 形式ファイルおよび LuaLaTeX ソース をおく．
- 採点の都合上**提出用紙のフォーマットの変更は不可**．とくに，ファイルは **2 ページ**ちょうど，サイズは **A4**．PDF 文書の「プロパティ」でサイズが 210×297mm となっていれば問題ない．
- 提出期限は講義直後の**月曜日の 07 時 00 分（JST）**．
  今年度は T2SCHOLA 上の提出受付停止は行わなず，提出のタイムスタンプで判断する．
- 提出物は次回の講義までに返却する；質問等には個人が特定できない形で回答する．

■PDF tips:

- PDF 文書が所定のサイズでない場合があります．この場合は，適当に用紙サイズを設定して「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．
- オリジナルの提出用紙に書き込みをして PDF 化した場合，ファイルを結合・分割すると書き込みが消えてしまうことがあるようです．PDF 化したファイルをもう一度 PDF リーダで読み込み，「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．

■授業日程

2021年12月09日	パラメータ変換・長さと面積
2021年12月16日	第一基本形式・第二基本形式
2021年12月23日	主曲率・ガウス曲率・平均曲率
2022年01月06日	平均曲率とガウス曲率の意味
2022年01月13日	— 月曜日授業
2022年01月20日	曲面論の基本定理
2022年01月27日	測地線
2022年02月03日	ガウス・ボンネの定理
2022年02月10日	試験（対面予定）
2022年02月17日	追試験（オンライン予定）

1 パラメータ変換・長さと面積

1.1 3 次元ユークリッド空間

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を "·" で表す：$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$．これを用いてベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさを $|\boldsymbol{v}| := \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ と定める．$\mathbb{R}^3$ の 2 点 P, Q の距離 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を保つ変換を等長変換という．$\mathbb{R}^3$ の等長変換は $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ の形に表される．ただし A は 3 次直交行列，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$．とくに $\det A = 1$ のとき，この等長変換を**向きを保つ等長変換**という．

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の**ベクトル積**（または**外積**）は，任意の $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ として特徴付けられる．

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が一次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に直交する．
- $A \in \mathrm{SO}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a})\times(A\boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．ただし $\mathrm{SO}(3)$ は行列式が 1 の直交行列全体の集合．
- $A \in \mathrm{O}(3)\setminus\mathrm{SO}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a})\times(A\boldsymbol{b}) = -A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．ただし $\mathrm{O}(3)$ は直交行列全体の集合．

■逆写像定理（二変数） 領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への C^∞-級写像 $\boldsymbol{f} = {}^t(f_1,\dots,f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ の点 P における**微分**とは，$(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{v} \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\boldsymbol{f}(\mathrm{P}+t\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^m$ のことである．$(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = (D\boldsymbol{f}(\mathrm{P}))\boldsymbol{v}$ が成り立つので $(d\boldsymbol{f})_{\mathrm{P}}$ は線形写像である．(m,n)-行列に値をもつ関数 $D\boldsymbol{f} := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)$ は $\boldsymbol{f}$ の**ヤコビ行列**とよばれる．

定義 1.1. 領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi\colon U \to V$ が**微分同相写像**であるとは，Φ と Φ^{-1} がともに C^∞-級となることである．これを**座標変換**ということもある．

定理 1.2 (逆写像定理)**.**
- 微分同相写像 $\Phi\colon \mathbb{R}^m \supset U \to V \subset \mathbb{R}^m$ のヤコビ行列 $D\Phi$ は U の各点で正則行列を与える．すなわち**ヤコビ行列式**（ヤコビアン）$\det D\Phi$ は零でない．
- C^∞-級写像 $\Phi\colon \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ のヤコビ行列 $D\Phi$ が点 $\mathrm{P} \in U$ で正則ならば，P の近傍 U' が存在して $\Phi|_{U'}\colon U' \to \Phi(U')$ は微分同相写像となる．

■3 次元ユークリッド空間の曲面 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級写像 $p\colon U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3$ が**曲面の正則パラメータ表示**または**正則曲面**であるとは，U の各点 P において $p_u(\mathrm{P})$, $p_v(\mathrm{P})$ が一次独立となることである．

例 1.3.
- 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 f のグラフは $(x,y) \mapsto {}^t(x,y,f(x,y))$ とみなせば正則曲面．
- xz-平面上の正則曲線 $\gamma(t) = {}^t\bigl(x(t),z(t)\bigr)$ が常に $x(t) \neq 0$ を満たしているとき，$p(u,v) = {}^t(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$ は正則曲面を与える（回転面）．
- テキスト 63 ページ．

このとき，さらに領域 $V \subset \mathbb{R}^2$ から領域 U への微分同相写像 $\varphi\colon V \ni (\xi,\eta) \mapsto \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U$ が与えられれば，合成写像 $\tilde{p} := p\circ\varphi\colon V \to \mathbb{R}^3$ は正則曲面を与え，その像は p の像と一致する：$p(U) = \tilde{p}(V)$．

2021 年 12 月 9 日 (2021 年 12 月 16 日訂正)

実際 $\tilde{p}$ が正則曲面を与えることは，チェインルール

$$
\left(\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v}\right) P = \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta}\right), \qquad P := D\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{1.1}
$$

と，座標変換 φ のヤコビ行列 P の正則性による．この状況を $\tilde{p}$ **は** p **からパラメータ変換で得られる**という．

■長さ・面積　領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を考える．有界閉区間 $[a,b]$ で定義された U 上の曲線 $\gamma\colon [a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) := {}^t\big(u(t), v(t)\big) \in U \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，$\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ は p の像の上の曲線を与える．チェインルールより $\dot{\hat{\gamma}}(t) = \dot{u} p_u + \dot{v} p_v$ なので，$\hat{\gamma}$ の弧長は次で与えられる：

$$
\mathcal{L}(\hat{\gamma}) := \int_a^b \sqrt{(p_u \cdot p_u)\dot{u}^2 + 2(p_u \cdot p_v)\dot{u}\dot{v} + (p_v \cdot p_v)\dot{v}^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\tfrac{du}{dt}, \tfrac{dv}{dt}\right) \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}}\, dt. \tag{1.2}
$$

定義 1.4. 領域 U の有界な部分領域 D でその閉包 $\overline{D}$ が U の部分集合となるものを考える．このとき $\overline{D}$ の像 $p(\overline{D})$ の**面積**を次で定義する：

$$
\mathcal{A}_p(\overline{D}) := \iint_{\overline{D}} |p_u \times p_v|\, du\, dv. \tag{1.3}
$$

命題 1.5. 弧長 (1.2) と面積 (1.3) は $\mathbb{R}^3$ の合同変換，パラメータ変換で不変である．

問題

1-1 領域 $D := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$ 上で定義された正則曲面
$p\colon D \ni (u,v) \mapsto p(u,v) := {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ に $u = u(\xi)$, $v = \eta$ という形のパラメータ変換を施して，$\tilde{p}(\xi,\eta) = p\big(u(\xi), \eta\big)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような $\tilde{p}(\xi,\eta)$ を求めなさい．

1-2 正の定数 R に対して, $D = [0, \pi R] \times [-\pi, \pi]$ で定義された正則曲面 $p(r,\theta) := R\, {}^t\big(\sin\frac{r}{R}\cos\theta, \sin\frac{r}{R}\sin\theta, \cos\frac{r}{R}\big)$ を考える．
与えられた正の数 ρ に対して

$$
S(\rho) := \{p(\rho,\theta)\,;\, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}, \qquad D(\rho) := \{p(r,\theta)\,;\, 0 \leqq r \leqq \rho, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}
$$

とおき，$S(\rho)$ の弧長を $\mathcal{L}(\rho)$, $D(\rho)$ の面積を $\mathcal{A}(\rho)$ とおく．このとき次の極限を求めなさい：

$$
\lim_{\rho \searrow 0} \frac{\mathcal{L}(\rho) - 2\pi\rho}{\rho^3}, \qquad \lim_{\rho \searrow 0} \frac{\mathcal{A}(\rho) - \pi\rho^2}{\rho^4}.
$$

1-3 正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$
p(u,v) := {}^t\left(a \cos v \cosh\frac{u}{a}, a \sin v \cosh\frac{u}{a}, u\right)
$$

で定める．正の数 δ に対して $S(\delta) := \{p(\delta, v)\,;\, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$, $D(\delta) := \{p(u,v)\,;\, -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$ とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい．