幾何学概論第二 (MTH.B212)

第一基本形式・第二基本形式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/16

問題 1-1

問題

領域 $D := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$ 上で定義された正則曲面
$p\colon D \ni (u, v) \mapsto p(u, v) := {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ に
$u = u(\xi)$, $v = \eta$ という形のパラメータ変換を施して,
$\tilde{p}(\xi, \eta) = p\bigl(u(\xi), \eta\bigr)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような
$\tilde{p}(\xi, \eta)$ を求めなさい.

問題 1-1

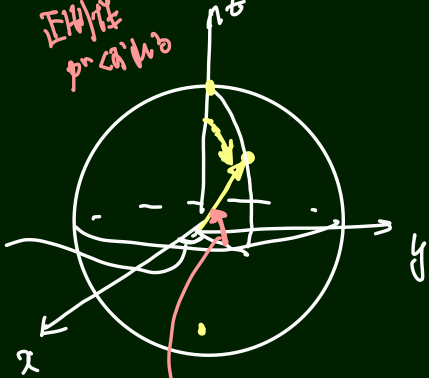
単位球面

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$$

極をのぞく

日付変更線をのぞく

正則性がくずれる



v 経度

u：緯度

問題 1-1

$$p(u,v) = \cos u\,\boldsymbol{e}_1(v) + \sin u\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_1(v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2(v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dv}\boldsymbol{e}_1(v), \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 正規直交系

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

$p_u = -\sin u\,\boldsymbol{e}_1 + \cos u\,\boldsymbol{e}_3$

$p_v = \cos u\,\boldsymbol{e}_2$

$|p_u|^2 = 1 \qquad |p_v|^2 = \cos^2 u$

$p_u \cdot p_v = 0$

$u = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow p_v = 0$

正則でない.

$u = u(\xi),\quad v = \eta \qquad \tilde{p}(\xi,\eta) = p(\underset{u}{u(\xi)}, \underset{v}{\eta})$

$$(\tilde{p}_\xi,\ \tilde{p}_\eta) = (p_u\ \ p_v)\begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{p}_\xi = u' p_u \qquad \tilde{p}_\eta = p_v$$

$$|\tilde{p}_\xi|^2 = (u')^2 \overset{1}{|p_u|^2} = (u')^2 \qquad \tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta$$

$$|\tilde{p}_\eta|^2 = |p_v|^2 = \cos^2 u \qquad = u' p_u \cdot p_v$$

$$= 0$$

条件 $u' = \pm\cos u$

ひとつみつければよいとする。

$$\frac{du}{d\xi} = \cos u \qquad \log\frac{1+\tan\frac{u}{2}}{1-\tan\frac{u}{2}} = \xi \qquad \xi = \xi(u)$$

$$\tan\frac{u}{2} = \tanh\frac{\xi}{2}$$

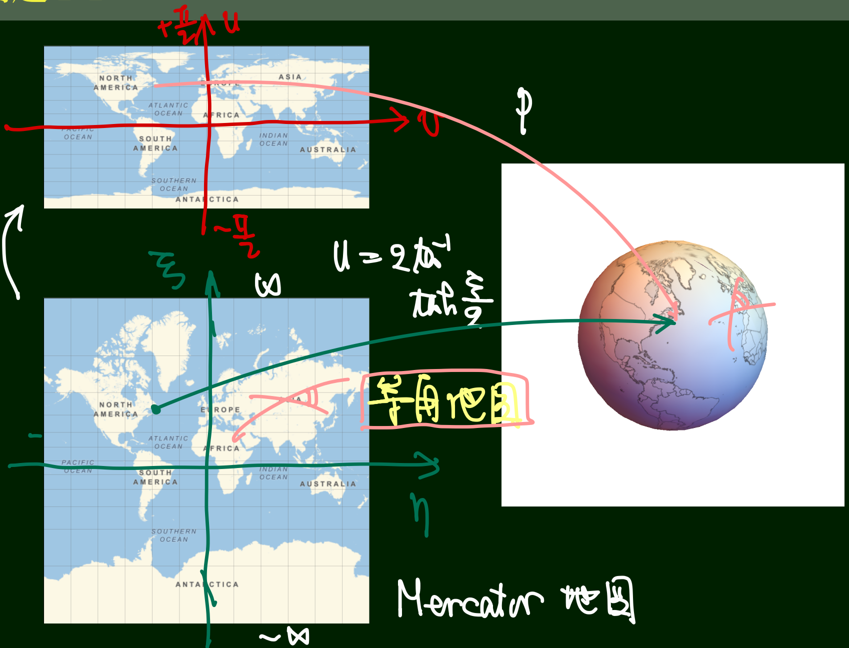
$$p(u(\xi),\eta) = \cos u(\xi)\, e_1(\eta) + \sin u(\xi)\, e_3$$

$$\cos u = \frac{1-\tanh^2\frac{\xi}{2}}{1+\tanh^2\frac{\xi}{2}} = \operatorname{sech}\xi \qquad \sin u = \frac{2\tanh\frac{\xi}{2}}{1+\tanh^2\frac{\xi}{2}} = \tanh\xi$$

$$\tilde{p} = \operatorname{sech}\xi\, e_1 + \tanh\xi\, e_3 \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\operatorname{sech}^2\xi + \tanh^2\xi = 1}$$

問題 1-1



NORTH AMERICA
ASIA
ATLANTIC OCEAN
AFRICA
PACIFIC OCEAN
SOUTH AMERICA
INDIAN OCEAN
AUSTRALIA
SOUTHERN OCEAN
ANTARCTICA
EUROPE
$+\frac{\pi}{2}$ u
v
p
$-\frac{\pi}{2}$
ξ
∞
$u = 2\tan^{-1}\tanh\frac{\xi}{2}$
η
等角地図
Mercator 地図
$-\infty$

問題 1-2

問題

正の定数 R に対して，$D=[0,\pi R]\times[-\pi,\pi]$ で定義された正則曲面 $p(r,\theta):=R\,{}^t\!\left(\sin\frac{r}{R}\cos\theta,\sin\frac{r}{R}\sin\theta,\cos\frac{r}{R}\right)$ を考える．
与えられた正の数 ρ に対して

$$S(\rho):=\{p(\rho,\theta)\,;\,-\pi\leqq\theta\leqq\pi\},$$
$$D(\rho):=\{p(r,\theta)\,;\,0\leqq r\leqq\rho,-\pi\leqq\theta\leqq\pi\}$$

とおき，$S(\rho)$ の弧長を $\mathcal{L}(\rho)$, $D(\rho)$ の面積を $\mathcal{A}(\rho)$ とおく．このとき次の極限を求めなさい：

$-\frac{\pi}{3R^2}$.

$$\lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mathcal{L}(\rho)-2\pi\rho}{\rho^3},\qquad \lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mathcal{A}(\rho)-\pi\rho^2}{\rho^4}.$$

$-\frac{\pi}{12R^2}$.

問題 1-2

$$p(r,\theta) := R\sin\frac{r}{R}\boldsymbol{e}_1(\theta) + R\cos\frac{r}{R}\boldsymbol{e}_3$$

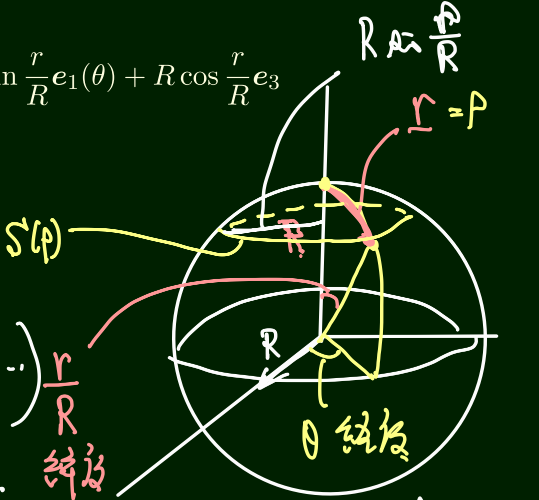
$$\ell(\rho) = 2\pi R \sin\frac{\rho}{R}$$

$$= 2\pi R\left(\frac{\rho}{R} - \frac{1}{6}\frac{\rho^3}{R^3} + \cdots\right) \quad \frac{r}{R}$$

$$= 2\pi\rho - \frac{\pi}{3}\frac{\rho^3}{R^2} + \cdots$$

緯度

$$\rho \approx 0 \Rightarrow \ell(\rho) = 2\pi\rho$$



$$A(\rho) = 2\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right)$$

問題 1-3

問題

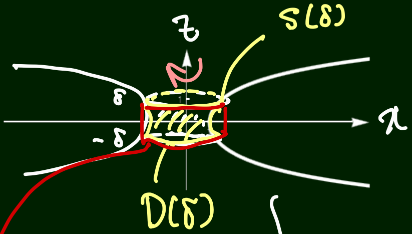
正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

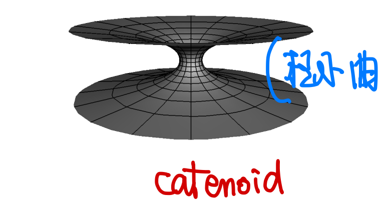
$$p(u,v) := {}^t\left(a\cos v\cosh\frac{u}{a}, a\sin v\cosh\frac{u}{a}, u\right)$$

で定める．正の数 δ に対して

$$S(\delta) := \{p(\delta, v)\,;\, -\pi \leqq v \leqq \pi\},$$
$$D(\delta) := \{p(u, v)\,;\, -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$$

とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい．





$x = a\cosh\frac{z}{a}$ (catenary 懸垂線)

$L(\delta) = 2\pi a\cosh\frac{\delta}{a}$

$A(\delta) = 2\pi a\left(\delta + \frac{a}{2}\sinh\frac{2\delta}{a}\right)$

$\rotatebox{90}{$\geq$}$

円柱の面積 $= 2\pi a\cdot 2\delta\cosh\frac{\delta}{a}$

a : 相似変換

$\frac{x}{a} = \cosh\frac{z}{a}$