幾何学概論第二 (MTH.B212)

第一基本形式・第二基本形式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/16

問題 1-1

問題

領域 $D := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$ 上で定義された正則曲面
$p\colon D \ni (u,v) \mapsto p(u,v) := {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ に
$u = u(\xi)$, $v = \eta$ という形のパラメータ変換を施して,
$\tilde{p}(\xi,\eta) = p\bigl(u(\xi), \eta\bigr)$ が $|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ を満たすような
$\tilde{p}(\xi,\eta)$ を求めなさい.

問題 1-1

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$$

問題 1-1

$$p(u,v) = \cos u\,\boldsymbol{e}_1(v) + \sin u\,\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_1(v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2(v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dv}\boldsymbol{e}_1(v),\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 1-2

問題

正の定数 R に対して，$D=[0,\pi R]\times[-\pi,\pi]$ で定義された正則曲面 $p(r,\theta):=R\,{}^t\!\left(\sin\frac{r}{R}\cos\theta,\sin\frac{r}{R}\sin\theta,\cos\frac{r}{R}\right)$ を考える．
与えられた正の数 ρ に対して

$$S(\rho):=\{p(\rho,\theta)\,;\,-\pi\leqq\theta\leqq\pi\},$$
$$D(\rho):=\{p(r,\theta)\,;\,0\leqq r\leqq\rho,-\pi\leqq\theta\leqq\pi\}$$

とおき，$S(\rho)$ の弧長を $\mathcal{L}(\rho)$, $D(\rho)$ の面積を $\mathcal{A}(\rho)$ とおく．このとき次の極限を求めなさい：

$$\lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mathcal{L}(\rho)-2\pi\rho}{\rho^3},\qquad \lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mathcal{A}(\rho)-\pi\rho^2}{\rho^4}.$$

問題 1-2

$$p(r,\theta) := R\sin\frac{r}{R}\boldsymbol{e}_1(\theta) + R\cos\frac{r}{R}\boldsymbol{e}_3$$

問題 1-3

問題

正の定数 a に対して正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$p(u,v) := {}^t\left(a\cos v\cosh\frac{u}{a}, a\sin v\cosh\frac{u}{a}, u\right)$$

で定める．正の数 δ に対して

$$S(\delta) := \{p(\delta, v)\,;\, -\pi \leqq v \leqq \pi\},$$
$$D(\delta) := \{p(u, v)\,;\, -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$$

とするとき，$S(\delta)$ の弧長と $D(\delta)$ の面積を求めなさい．