幾何学概論第二 (MTH.B212)

第一基本形式・第二基本形式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/16

微分

$U \subset \mathbb{R}^2$：領域；$f\colon U \ni (u,v) \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}$：$C^\infty$

$$df := f_u\,du + f_v\,dv = (f_u, f_v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}: \quad f \text{ の微分}$$

$\varphi\colon V \ni (\xi,\eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \in U$: 微分同相

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta \\ v_\xi\,d\xi + v_\eta\,d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

$\tilde{f} = f \circ \varphi$

$$d\tilde{f} = (\tilde{f}_\xi, \tilde{f}_\eta)\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (f_u, f_v)P\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (f_u, f_v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = df.$$

$\Rightarrow$ 微分はパラメータのとり方によらない

第一基本量・第一基本形式

$$p : U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{aligned}
\text{第一基本行列} = \widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) \\
&= \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{第一基本形式} &= (du, dv)\, \widehat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = {}^t(dp)dp = dp \cdot dp \\
&= E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2
\end{aligned}$$

- 第一基本形式はパラメータのとり方によらない.

第一基本行列のパラメータ変換

$p : U \ni (u, v) \mapsto p(u, v) \in \mathbb{R}^3$, 正則曲面；
$\varphi\colon (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$：パラメータ変換；
$\tilde{p} = p \circ \varphi$.

命題

p の第一基本行列を $\widehat{I}$，$\tilde{p}$ の第一基本行列を $\widetilde{\widehat{I}}$ とすると，

$$\widetilde{\widehat{I}} = {}^t P \, \widehat{I} \, P, \qquad \left(P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right).$$

長さ・面積・角度

正則曲面 p の第一基本行列を $\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ とする.

命題

- 曲面の各点において $\widehat{I}$ は正値対称行列．とくに $\det \widehat{I} > 0$, $E > 0$, $G > 0$.
- $|p_u \times p_v|^2 = EG - F^2 = \det \widehat{I}$.

接平面・法ベクトル

$p\colon U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3$：正則曲面.

$$\left(\begin{array}{l}\text{曲面 } p \text{ の } (u_0,v_0) \in U \text{ に} \\ \text{おける接ベクトル空間}\end{array}\right) = dp(T_{(u_0,v_0)}U)$$

$$:= \mathrm{Span}(p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)) \subset \mathbb{R}^3$$

- $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間.
- $\widehat{I}$ は $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ の内積の,
  基底 $\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$ に関する表現行列.
- $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ に直交するベクトルを p の (u_0,v_0) における
  法ベクトルという.

単位法ベクトル場

$p\colon (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3$：正則曲面

定義

曲面 p の単位法ベクトル場とは，C^∞-級写像
$\nu\colon (u,v) \mapsto \nu(u,v) \in \mathbb{R}^3$ で，各 (u,v) において

- $\nu(u,v)$ は p の (u,v) における法ベクトル.
- $|\nu(u,v)| = 1$

を満たすもの.

$$\nu = \pm \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

単位法ベクトル場

p: 正則曲面, ν: 単位法ベクトル場.

補題

各点 (u, v) において

- ν_u, ν_v は ν に直交する.
- $p_{uu} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_u,$
  $p_{uv} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_v,$
  $p_{vu} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_u,$
  $p_{vv} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_v.$
- $p_u \cdot \nu_v = \nu_u \cdot p_v.$

第二基本形式

$$
\begin{aligned}
\text{第二基本行列} = \widehat{I\!I} &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} := -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) \\
&= -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} \\
\text{第二基本形式} &= (du, dv)\, \widehat{I\!I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = -{}^t(dp) d\nu = -dp \cdot d\nu \\
&= L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 a
\end{aligned}
$$

第二基本形式はパラメータのとり方によらない

問題 2-1

問題

$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, |\boldsymbol{x}| = 1\}$ 上の点 $\mathrm{N} = {}^t(0,0,1)$ を取る．xy 平面上の点 $\mathrm{P} = {}^t(u,v,0)$ に対して N, Q, P が同一直線上にあるような $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ 上の点 Q がただ一つ存在する．この Q を $p(u,v)$ と書くと，p は $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ の正則なパラメータ表示を与える．この第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

問題 2-2

問題

実数 α に対して

$$p_\alpha(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos v\cosh u - \sin\alpha\sin v\sinh u \\ \cos\alpha\sin v\cosh u + \sin\alpha\cos v\sinh u \\ u\cos\alpha - v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．