2021 年 12 月 16 日 (2021 年 12 月 23 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 2

■前回の補足

- 特異点をもつ曲面の面積はどう考えるか，というご質問が複数．パラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の特異点とは $\{p_u, p_v\}$ が一次従属となる点なので $p_u \times p_v = \mathbf{0}$．そうであっても $|p_u \times p_v|$ は連続関数だからその積分を「面積」とできる．
- 曲面の面積を四角形で近似して極限をとはできないということをのべましたが，それに関する質問が三角形分割のアイデアを含め複数．実際，4 点 $p(u,v)$, $p(u+\Delta u, v)$, $p(u, v+\Delta v)$, $p(u+\Delta u, v+\Delta v)$ は一般に同一平面上にない．三角形分割は可能ですが，こから積分の式につなげるのはちょっと大変．ここでは面積を積分を使って「定義する」ということにしておく．
- 曲面には標準的なパラメータがないとのべましたが，関連して質問やアイデアが多数．(1) 面積を用いる（等積座標系）(2) 片方の座標曲線が弧長パラメータで表示される，などの案があったが，これらは一意性をもたない．曲線の弧長パラメータは定数の差を除いて一意的なので「弧長パラメータに変換して諸量を定義する」ことが可能．

■前回までの訂正

- 講義資料 1, 2 ページ，4 行目：質問しても i よい ⇒ 質問してもよい
- 講義資料 1, 3 ページ，13 行目：**逆写像定理（二変数）⇒ 逆写像定理（多変数）**
- 講義資料 1, 4 ページ, 問題 1-2, 1 行目;映写資料 C 8 ページ (曲面の定義式の修正)：$p(r,\theta) := R\,{}^t\left(\sin\frac{r}{R}\cos\theta, \sin\frac{r}{R}\sin\theta, \cos\frac{r}{R}\right)$
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-3, 3 行目：$S(\delta) := \{p(\delta, v)\,;\, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$, $D(\delta) := \{p(u,v)\,;\, -\delta \leqq u \leqq \delta, -\pi \leqq v \leqq \pi\}$
- 映写資料 B，8 ページ： $$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde f}{\partial \xi}(\xi,\eta) &= \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*)\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*)\\ \frac{\partial \tilde f}{\partial \eta}(\xi,\eta) &= \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*)\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\frac{\partial \tilde f}{\partial \xi}(\xi,\eta) &= \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*)+\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial v}(*)\\ \frac{\partial \tilde f}{\partial \eta}(\xi,\eta) &= \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial u}(*)+\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta)\frac{\partial f}{\partial v}(*)\end{aligned}$$
- 映写資料 B，9 ページ・13 ページ：削除（重複）
- 映写資料 B，10 ページ（逆写像定理)：ヤコビ行列点 P で ⇒ ヤコビ行列が点 P で
- 黒板 B，最後のページ（回転面の例）次が正しい：$p_u \times p_v = {}^t(-x\cos v\dot z, -x\sin v\dot z, x\dot x)$

■授業に関する御意見

- 文脈を読むときは大域的な情報が必要だと思いました． **山田のコメント：** 全くそうですね．
- ξ をうまくかくのがむずかしいです． **山田のコメント：** 手書きで作ったレポート用紙を読むのが難しいです．
- Q 1-1 は途中まで計算したのですが $|u'(\xi)| = |\cos(u(\xi))|$ となり $u(\xi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から $|u'(\xi)| = \cos u(\xi)$ となった所で止まりました．続きは一体どうすればよいのでしょうか？ **山田のコメント：** 微分方程式 $u' = \pm\cos u$ を解く．
- ラプラス・ダークネスの配信を見ながら 27:00 ころに仕上げました．ツライ．/Y.M.D. **山田のコメント：** 何時に始めましたか？
- 空間上の曲面の性質は以前から興味があったのでこれからの授業がとても楽しみです． **山田のコメント：** なるほど．
- 課題の提出を手書きから IPad に変えたのですが，字の読みやすさやファイル形式に問題ありますでしょうか． **山田のコメント：** 大丈夫そうです．
- 曲面の内容に入り，いっきに難しくなったように感じました．4Q も引き続きよろしくお願い致します!!/ 4Q もよろしくお願いします!!（他 2 件） **山田のコメント：** こちらこそ．

■質問と回答

質問 1： 曲面の面積の定義で $p(D)$ の面積でなく $p(\overline{D})$ の面積を定義していますが, $p(D)$ の面積を $p(\overline{D})$ と同様に $\iint_D |p_u \times p_v|\,du\,dv$ と定義してしまうと何か問題が起きるのでしょうか． **お答え：**重積分は有界閉集合上で定義されるので $\overline{D}$．D 上では広義積分．

質問 2： 次元を上げたときの面積の定義は $\mathcal{A}_p(\overline{D})$ と同じように外積を使ってできますか？ **お答え：**何の次元を上げる？

質問 3： 正則曲面 $p\colon D \ni (u,v) \mapsto p(u,v)$ の面積を求めるときに，u をある k に固定したときの曲線 $p(k,v)$ の長さを求め，k を微小変化させたときの曲線の移動距離から面積を求めたらどうなるかと考えましたが，曲線 $p(k,v)$ の微小移動距離は v の位置ごとに異なるので，この考え方でも結局面積を求める場合は $\iint_D |p_u \times p_v|\,du\,dv$ をすることになりそうだと思いました．

お答え： 結局そうですよね．移動距離の曲線に直交する成分も必要ですね．

質問 4： 等長変換で曲線の弧長は変わらないが面積が変わるような空間は存在するのか？ またその逆となるような空間は存在しますか？ **お答え：**空間の存在？ 空間としてリーマン多様体を想定すると，面積の定義より等長変換で面積は保たれる．逆とは？

質問 5： 定義 1.4 のように体積を定義することはできますか？ また曲面上の曲線の弧長が $\mathbb{R}^3$ の等長変換で不変であれば，体積も不変となるのでしょうか？ **お答え：**何の体積？ 曲面の体積は零．後半の「曲面上の曲線の弧長が等長変換で不変」は常に真．

質問 6： 曲面上の弧長がパラメータ変換に依らないということの証明について質問です．授業スライドに記述にのっとると，曲面上の曲線のパラメータ表示 $\tilde\gamma = p\circ\gamma$ が曲面のパラエータを変換しても $p\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\gamma = p\circ\gamma = \tilde\gamma$ となることから言えそうな気がしてチェインルールを使う必要がないような気がします．何か重大な誤解をしていましたらすみません． **お答え：**正しいです．

質問 7： 曲線のパラメータ変換では，$\tilde\gamma(\theta) = \gamma(\theta(t))$ として $d\theta/dt > 0$ が向きを変えないパラメータ変換となりましたが，曲面の場合，$\tilde p(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ としてヤコビアン行列式（原文ママ：“ヤコビアン” だけで行列式を意味します）が正であるというのはどのような幾何学的性質に対応するのでしょうか．表裏でしょうか．

お答え： 表・裏を定義していないのでなんとも言えませんが $p_u \times p_v$ が指し示す側が「表側」と定義すれば表裏ですね．

質問 8： $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, $A \in \mathrm{O}(3)\setminus\mathrm{SO}(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ のとき，f は向きを反転する等長変換となりますか？

お答え： これが（当面の）「向きを反転する等長変換」の定義．「向き」は当面定義しない．

質問 9： 曲率円を考えたように曲面において曲率球みたいな，あるいはそれに準じるものを考えることはありますか．個人的には球は曲がり方（？）が一定なので不十分かなと思いました． **お答え：**はい，球面での近似では不十分．たとえば $z = xy$ のグラフ．

質問 10： 例 1.3 に関して $\gamma(t) = (x(t), y(t))$（山田注：たぶん $(x(t), z(t))$）で $x(t) = 0$ となる t が有限個のとき，その回転面は正則とは限りませんが，正則曲面に近い「良い」性質はありますか？ 例えば，$\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [-1,1]$ の回転面は正則曲面と同

じ方法で面積が求められると思います． **お答え：**面積にそう．質問の曲面は円錐．「円錐的特異点」で調べてみよう．

質問 11： 1.1 にあるベクトル積の特徴づけ「$\forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$」をもとに $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ 上の $n-1$ 本のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, …$\boldsymbol{a}_{n-1}$ からベクトル $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}] \in \mathbb{R}^n$ を「$\forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3, ([\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}]) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{c})$」によって定義づけられると思いますが，これが使われることはありますか．たとえば $\mathbb{R}^2$ 上の正則曲線 γ に対して $\boldsymbol{n} = -[\boldsymbol{e}]$ ($\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ はそれぞれ単位接ベクトル，左向き単位法線ベクトル)．この例を踏まえると，上記の定義付けの右辺は $\det(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1})$ のほうがよいようにも感じました． **お答え：**$n=2$ で試してみるのは大事．ただ，ご質問の記号で $[\boldsymbol{e}] = \boldsymbol{n}$ になるはず．

質問 12： 行列式における外積の定義によって外積ベクトルの大きさがベクトルの張る平行四辺形の面積に一致するのは「あたりまえ」なのでしょうか？ すなわち $\mathbb{R}^n$ のベクトル積の大きさがなんらかの意味をもっていて，$n=2$ のときが面積に一致するということなのでしょうか． **お答え：**$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が張る面積 S の平行四辺形を底面にもち，これらに直交する方向に高さ 1 をもつ柱体の体積は，S となるが，一方，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとると，体積は $|\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{n})|$ とも表せる．

質問 13： 4 次元以上の次元のユークリッド空間で外積は定義できますか． **お答え：**ということを講義中に説明しましたね．

質問 14： 曲線のときの正則の条件が $\dot\gamma \neq 0$ だったのでそれを曲面に拡張して $p_u \neq 0$, $p_v \neq 0$ だと思いましたが，実際は一次独立という条件でした．大きく違っているように見えますが，関係性はありますか？ **お答え：**1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

質問 15： 曲線のときと曲面のときとで正則の定義が異なっていたが，曲面の次元を 1 つあげた曲立体において正則な曲立体とはどう定義されますか． **お答え：**正則曲面の真似をすればよい．曲立体という語はあまり使わない．

質問 16： 面積・弧長がパラメタ変換によらないのは，直感的にはパラメタ変換で曲面の形が変わらないことによるのでしょうか.

お答え： そうとも言えますし，そうなるように面積・体積を定義すべきとも言えます.

質問 17： 1-1 で $\tilde p(\xi, \eta) = {}^t(\operatorname{sech}\xi\cos\eta, \operatorname{sech}\xi\sin\eta, \tanh\xi)$ が解となった．ここでこの問題では $\tilde p$ の像は球面上に乗るが，今回のパラメータ変換 $u(\xi) = 2\tan^{-1}\left(\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)$ の逆変換を球面上の座標（緯度）に作用させたものがメルカトル図法なのだろうか？ $\tilde p_\xi \cdot \tilde p_\eta = 0$ はメルカトル図法の等角性を表しているのか？ **お答え：**前半：はい．等角性は質問の式と $|\tilde p_\xi| = |\tilde p_\eta|$ から.

質問 18： 問題 1-1 について $\tilde p$ の像 $S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$ は球面から 2 点を除いたものとなる．仮に $S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$ を $\tilde p^{-1}$ で $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の平面に移せば，この平面は元の球面の地図となる．1-1 で示した性質を用いてこの地図（おそらくメルカトル図法）の性質を示せないだろうか． **お答え：**1-1 の性質が等角性そのもの．ところで $\tilde p^{-1}$ でよいでしょうか.

質問 19： 問 1-2 で D の定義域が閉区間になっていますが，このことにより開区間の場合と何が違うのでしょうか.

お答え： 球面の一回り分をきちんと積分したかったので両端を含めた．ちょっと反則.

質問 20： 解析学概論では正則曲面のパラメータ変換 $\Phi\colon V \to U$ を微分同相 (a) とするのではなく「ヤコビアンが 0 にならない C^∞ 級全単射」(b) としていました．(b) $\Rightarrow$ (a) を示そうと思い，次のように考えたのですが正しいですか？（略）

お答え： 逆写像（全単射だから存在はする）の微分可能性を示せば十分だから局所的な議論（逆写像定理）で大丈夫．正しいです.

質問 21： 「微分同相写像」という言葉に少し違和感を覚えますが「微分」とどのような関係があるのでしょうか． **お答え：**可微分.

質問 22： 基底という用語については，微分幾何学入門を紹介する YouTube 動画では $(\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v})$ を基底としているものもあれば $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ をそのまま基底としているものもあります.（以下略） **お答え：**「何の」基底か，を明らかにしよう．曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ に対して，2 次元多様体 U の点 (u_0, v_0) における接空間の基底として $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ が取れる．これを p の微分 dp で $\mathbb{R}^3$ の $p(u_0, v_0)$ における接空間（$\mathbb{R}^3$ と同一視される）の元とみなしたものが $(dp(\partial/\partial u), dp(\partial/\partial v)) = (p_u, p_v)$．これは，像 $p(U)$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合，その接平面を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とみなしたときの基底（気にしないで）.

質問 23： 正則曲面上の曲線はすべてなめらかですか？ **お答え：**曲線がなめらか，という語をどの意味で使っていますか.

質問 24： 正則曲面の例でこういう（略：回転面）$\mathbb{R}^n$ の連結開集合と同相でない曲面を考えていいなら，曲面上の面積の定義はメビウスの帯みたいな曲面についてもてきようしていいのですか.（「曲線と曲面」をみたのですが，結局自己交さのない場合のみ考えているのか向き付可能な場合のみを考えているのかよくわからないです．境界のない向き付け不可な曲面は自己交さを持ちそうですが，自己交さしないことが面積分にかかわってくる感じがしません） **お答え：**パラメータ表示ではかかわらない.

質問 25： 例 1.3 で回転面のパラメータ表示について示されていましたが，z 軸などの軸だけでなく $y=x$ などの一般の（空間上の）直線の場合でもこのようにパラメータ表示を与えることができるのでしょうか.（各点と直線の距離を考えれば与えられそうな気がしますが…） **お答え：**ヒント：正規直交系をとる．やってみよう．ところで $\mathbb{R}^3$ で $y=x$ は平面を表しますね.

質問 26： 曲線と違って曲面は式を見て概形がわかりにくいです．曲面の概形を調べるにはどのようにすればいいのですか？

お答え： 与えられた式から曲線の概形を調べるには一般にどのようにしていますか？

質問 27： $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面，$\gamma\colon [a,b] \to U$：$C^\infty$ 級曲線，$\tilde\gamma := p \circ \gamma$ として $\binom{{}^t p_u}{{}^t p_v}(p_u, p_v) = E_3$，すなわち $(p_u, p_v, p_u \times p_v)$ が各点毎に $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となるとき，γ と $\tilde\gamma$ の弧長が等しくなると計算をしてみてわかりました．$(p_u, p_v, p_u \times p_v)$ には空間曲線の Frenet 枠のように特に名前が付いていたりするのでしょうか． **お答え：**Gauss 枠に関係する．第 5 回に言及する.

質問 28： 以下，$\mathbb{R}^3$ には通常の位相を入れ，その部分集合には相対位相を入れます．曲面の滑らかな変形で不変な性質を考えていたときに，$\mathbb{R}^3$ の正則閉曲面について個人的に興味がある考察ができたので質問します．「正則閉曲面 S から S 上の交わらない正則閉曲線 γ_1, …, γ_k を除いた部分 $S \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ が連結となるような γ_k が存在する」を満たす最大の k によって正則閉曲面が分類できるだろうと考えました．つまり 2 つの正則閉曲面について「微分同相写像などで移り合う $\Leftrightarrow$ その k が一致」なのではないかと思いました．これは正しいですか． **お答え：**「閉曲面の分類定理」．k は種数 genus．一般に種数が一致する閉曲面は（2 次元多様体として）微分同相ですが，$\mathbb{R}^3$ の微分同相写像で移り合う，あるいは $\mathbb{R}^3$ の連続変形で移り合うとは限りません.

質問 29： 曲線・曲面については解析学の講義でも少し扱いましたが，解析学と幾何学でアプローチの仕方として具体的にどのような違いがありますか． **お答え：**観察してください．幾何学では「不変量」のようなものを気にします.

質問 30： 得点の計算式において $x_{\max} = 0$ だった場合はどうなりますか？ また $l \searrow 0$ は $l \to +0$ という意味ですか． **お答え：**前半：想定していない．いま $x_{\max} > 0$ が確定．後半：はい $l \downarrow 0$, $l \to 0_+$ などとも書きます.

2　第一基本形式・第二基本形式

ここでは断りのない限り U, V をそれぞれ uv-平面, $\xi\eta$-平面の領域, $\varphi\colon V \ni (\xi,\eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \in U$ を微分同相（パラメータ変換），そのヤコビ行列を P とする：$P := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$.

■微分　領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-級関数 $(u,v) \mapsto f(u,v)$ に対して $df := f_u\,du + f_v\,dv$ を f の**全微分**，**微分**または**外微分**という．ここで，パラメータ変換 $\varphi\colon (\xi,\eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ に対して

(2.1)
$$du = u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta, \quad dv = v_\xi\,d\xi + v_\eta\,d\eta \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

と考え，$\tilde{f} := f \circ \varphi$ とおくと，次のように**全微分はパラメータのとり方によらない**ことがわかる：

$$\tilde{f}_\xi\,d\xi + \tilde{f}_\eta\,d\eta = (\tilde{f}_\xi, \tilde{f}_\eta) \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (f_u, f_v) P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (f_u, f_v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

以下，$p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を曲面の正則な（C^∞-級）パラメータ表示（正則曲面），$\tilde{p} := p \circ \varphi$ としておく．また $A \in \mathrm{O}(3)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\hat{p} := Ap + \boldsymbol{a}$，すなわち $\hat{p}$ は p に $\mathbb{R}^3$ の合同変換を施したものとする．

■第一基本量と第一基本形式　正則曲面 $p(u,v)$ に対して

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

を**第一基本行列**，関数 E, F, G を**第一基本量**という．曲面 p に $\mathbb{R}^3$ の合同変換を施した $\hat{p} = Ap + \boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}_u = Ap_u$, $\hat{p}_v = Ap_v$ なので，内積が直交行列の作用で不変なことから，**第一基本量は $\mathbb{R}^3$ の合同変換で不変である**．また，曲面 p をパラメータ変換して得られた曲面 $\tilde{p}$ の第一基本行列を $\widetilde{\widehat{I}}$，第一基本量を $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ と書くと，チェイン・ルールより，ヤコビ行列 P を用いて $\widetilde{\widehat{I}} = {}^t P \,\widehat{I}\, P$ と書ける．したがって第一基本量はパラメータに依存する．ここで，(2.1) を考えると，次の式はパラメータのとり方によらない：

$$ds^2 := dp \cdot dp = (du, dv)\,\widehat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

すなわち $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \widetilde{E}\,d\xi^2 + 2\widetilde{F}\,d\xi\,d\eta + \widetilde{G}\,d\eta^2$．これを曲面の**第一基本形式**という．テキスト例 7.2.

■長さ・角度・面積　曲面 $p(u,v)$ の (u_0,v_0) における**接ベクトル空間**とは $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が張る $\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間である．これを $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ と表す[*1]．$\mathbb{R}^3$ の内積を制限すれば，部分空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ の内積が得られるが，第一基本行列はその内積の，基底 $\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$ に関する表現行列である．とくに，$p_u = p_u(u_0,v_0)$ などと略記すれば

(2.2)
$$\boldsymbol{x} = x_1 p_u + x_2 p_v = (p_u, p_v) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = y_1 p_u + y_2 p_v \quad \text{に対して} \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1, x_2)\,\widehat{I} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

このことから，接ベクトル空間の元（接ベクトル）の長さ，角度は第一基本量で表される．

2021 年 12 月 16 日 (2021 年 12 月 23 日訂正)

*1 煩雑な記号だが，多様体論における一般的な記号を用いた．2 次元多様体 U の (u_0,v_0) における接空間をはめ込み p の微分で $\mathbb{R}^3$ の $p(u_0,v_0)$ における接空間に送った像のことだが，ここでは一つの熟語とみなせば良い．

とくに，U 上の曲線 $\gamma(t)=(u(t),v(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ の像 $\hat\gamma(t)=p\circ\gamma(t)$ の弧長は次で与えられる：

$$\mathcal{L}(\hat\gamma)=\int_a^b \sqrt{E\,\dot u^2+2F\,\dot u\,\dot v+G\,\dot v^2}\,dt.$$

また，ラグランジュの恒等式 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$ から，$\overline{D}$ が有界であるような領域 $D\subset U$ に対応する曲面の面積は次で与えられる（テキスト例 7.3）：

$$\mathcal{A}_p(\overline{D})=\iint_{\overline{D}} dA, \qquad dA:=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

■単位法ベクトル 正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ に対して，C^∞-級写像 $\nu\colon U\to\mathbb{R}^3$ で，各 (u_0,v_0) において $|\nu(u_0,v_0)|=1$ かつ $\nu(u_0,v_0)\perp dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ を満たすものを**単位法ベクトル場**という．$dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ は 2 次元なのでその直交補空間は 1 次元なので，各点における "単位法ベクトル" は 2 通りのとり方しかない．とくに $\nu=\pm\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$. どちらをとってもよいが，以下単位法ベクトル場を一つ指定しておく．

■第二基本量と第二基本形式

補題 2.1. 正則曲面 $p=p(u,v)$ の単位法ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとるとき，次が成り立つ：

$$p_{uu}\cdot\nu=-p_u\cdot\nu_u,\quad p_{uv}\cdot\nu=-p_u\cdot\nu_v,\quad p_{vu}\cdot\nu=-p_v\cdot\nu_u,\quad p_{vv}\cdot\nu=-p_v\cdot\nu_v \quad \text{とくに}\quad p_u\cdot\nu_v=p_v\cdot\nu_u.$$

証明： ベクトル値関数の内積についての「積の微分公式」から $p_{uv}\cdot\nu=(p_u\cdot\nu)_v-p_u\cdot\nu_v=-p_u\cdot\nu_v$. 最後の等号は p_u と ν が常に直交することによる．

定義 2.2. 正則曲面 $p(u,v)$ とその単位法ベクトル場 $\nu(u,v)$ に対して

$$\widehat{I\!I}=\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}:=-\begin{pmatrix}{}^t p_u\\ {}^t p_v\end{pmatrix}(\nu_u,\nu_v)=-\begin{pmatrix}p_u\cdot\nu_u & p_u\cdot\nu_v\\ p_v\cdot\nu_u & p_v\cdot\nu_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{uu}\cdot\nu & p_{uv}\cdot\nu\\ p_{vu}\cdot\nu & p_{vv}\cdot\nu\end{pmatrix}$$

を**第二基本行列**，L, M, N を**第二基本量**という（テキスト例 8.2, 8.3, 8.4）．

曲面 p に合同変換を施した曲面 $\hat p=Ap+\boldsymbol{a}$ に対して，$A\nu$ は $\hat p$ の単位法ベクトル場を与える．この法ベクトル場に対して**第二基本量は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない**．さらに，第一基本形式と同様に

$$I\!I=(du,dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$$

を**第二基本形式**とよぶ．第一基本形式の場合と同様に第二基本形式もパラメータのとり方によらない．

問題

2-1 $\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,;\,|\boldsymbol{x}|=1\}$ 上の点 $\mathrm{N}={}^t(0,0,1)$ を取る．xy 平面上の点 $\mathrm{P}={}^t(u,v,0)$ に対して N, Q, P が同一直線上にあるような $S^2\setminus\{\mathrm{N}\}$ 上の点 Q がただ一つ存在する．この Q を $p(u,v)$ と書くと，p は $S^2\setminus\{\mathrm{N}\}$ の正則なパラメータ表示を与える．この第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

2-2 実数 α に対して

$$p_\alpha(u,v):=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos v\cosh u-\sin\alpha\sin v\sinh u\\ \cos\alpha\sin v\cosh u+\sin\alpha\cos v\sinh u\\ u\cos\alpha-v\sin\alpha\end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．