幾何学概論第二 (MTH.B212)

復習

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/23

お知らせ

- 課題は 12 月 20 日 07:00 JST に締め切りました.
  今回は 34 名の提出がありました.
- T2SCHOLA からフィードバックしています.
  フィードバックされていないようでしたらお知らせ下さい.
  （ちょっと挙動が不審です）
- 2021 年の講義は今回が最終，次回は 2022 年 1 月 6 日となります．良いお年をお迎えください.

- 課題の提出期限は来週月曜日，12 月 28 日の 07:00 JST です.

ご意見から

- 私の人生の中で計算量の多い問題 top 3 に入るほどの問題でした（2-2 の話ですよね）．次回，この問題の工夫したやり方等がきけることを楽しみにしております．
  山田のコメント：そんなに大変？
- 「$df = f_x\,dx + f_y\,dy$」や「$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$」のような微分量を用いた形式的な表現がどのように正当化されるかに興味があります．
  山田のコメント：微分形式，テンソルなどの言葉で正当化されます．

質問から

Q: 2次形式の表現行列？

- V : a vector sp. $/\mathbb{R}$, $\dim V < \infty$
- $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ 　$\varphi(x, x)$

$\boxed{対称}$双線形形式

- $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- $\varphi(x, \cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ 線型
- ($\varphi(\cdot, y) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ 〃)

$\downarrow$

- $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 　☆ $\varphi(x, y) = {}^t x A y$

A : $n \times n$ の対称行列

- V の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, 　$\varphi_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ 　(φ_{ij}) 表現行列

基底 $\{v_j\}$ に関する

$\hat{I}$: 内積を

接ベクトル空間に制限

したものの, 基底 $\{p_u, p_v\}$

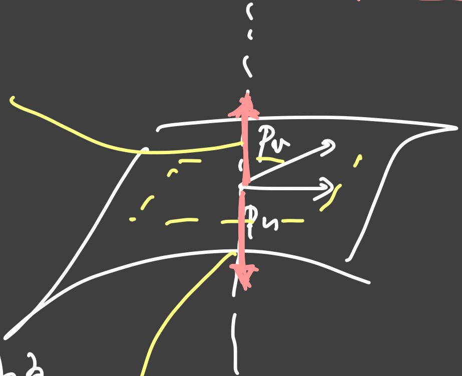
に関する表現行列.

質問から

Q: 単位法ベクトル場が二通りあること.

$3 = 2 + 1$

$$\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$



第二基本形式

$-d\nu \cdot dp$

の符号は ν の選び方でかわる

(どちらか指定する!)

$-(\ \ ,\ \ )$

質問から

xy平面 $\qquad z = f(x,y) \sim 0$

Q: $p(u,v) = {}^t(u,v,0)$ の第二基本形式が 0 であると計算してみて分かりました．このことから，曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して “p が平面” $\Rightarrow$ “U 上で p の第二基本形式が 0” が分かるのですが，この逆は成り立つでしょうか？ あるいは第二基本形式が 0 であるにもかかわらず平面でないような曲面は存在するでしょうか．

A: 逆が成立します．

質問から

$|p_u|^2$ $|p_v|^2$ $|p_u \times p_v|^2$

Q: 第一基本量では $E, G > 0$ や $\det \widehat{I} > 0$ などの性質がありますが，第二基本量では $L < 0$ や $\det \widehat{II} < 0$ となることが 2-2 で分かりました．また $p = {}^t(u, v, u^2)$ とすると $p_u = {}^t(1, 0, 2u)$, $\nu_u = {}^t(-2, 0, -4u)/(1 + 4u^2)^{3/2}$ より $L = -p_u \cdot \nu_u > 0$ となることも分かり，L の正負は特に決まらないことが分かりました．第二基本量は何か良い性質を持っているのでしょうか？

A:
- 対称行列の正値性.
- 第二基本量は曲面の「形」に直接関係する.

・ $\widehat{I}$: 正値対称行列 (すべての固有値 > 0)

(2次) : $\Leftrightarrow \det \widehat{I} > 0$ か $\mathrm{tr}\, \widehat{I} > 0$

講義

この後，短い休憩をとり，２つの「講義」を行います．
質問などをチャットで行なう場合は，全員宛てにしてください

1. 復習
2. ガウス曲率・平均曲率