幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

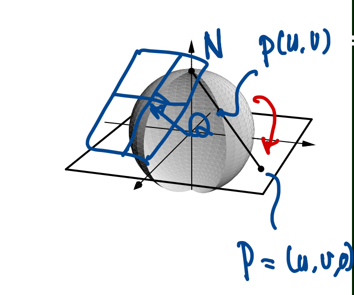
2021/12/23

問題 2-1

問題

$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, |\boldsymbol{x}| = 1\}$ 上の点 $\mathrm{N} = {}^t(0,0,1)$ を取る．xy 平面上の点 $\mathrm{P} = {}^t(u,v,0)$ に対して N, Q, P が同一直線上にあるような $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ 上の点 Q がただ一つ存在する．この Q を $p(u,v)$ と書くと，p は $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ の正則なパラメータ表示を与える．この第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

問題 2-1 (立体射影) the stereographic projection



$$= (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x,\ y,\ z-1)$$

$$\overrightarrow{NP} = (u,\ v,\ -1)$$

N, P, Q が同一直線上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{NQ} \parallel \overrightarrow{NP}$

$$\Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{NQ} \times \overrightarrow{NP}} = 0$$

$$= (-y + v(1-z),\ x - u(1-z),\ xv - yu)$$

- $y = v(1-z)$, $x = u(1-z)$, $x^2+y^2+z^2 = 1$

$$(u^2+v^2)(1-z)^2 = 1 - z^2$$

$$u^2+v^2 = \frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}$$

$z \neq 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}(1+u^2+v^2)$$

$+$ $-$

$$z = \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}$$

$$\frac{-2}{1+u^2+v^2}+1$$

$$p(u,v)=\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2},\frac{2v}{1+u^2+v^2},\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)$$ (立体射影)

$$ds^2=\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(du^2+dv^2),$$

$\boxed{E=G \quad F=0}$

$$\tilde{p}(\xi,\eta)=(\operatorname{sech}\xi\cos\eta,\operatorname{sech}\xi\sin\eta,\tanh\xi)$$ (Mercator)

$$d\tilde{s}^2=\operatorname{sech}^2\xi(d\xi^2+d\eta^2).$$

1-1

$p_u =$ $\qquad$ $p_v = \cdots$

$$\nu=\pm\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}=\pm p$$

$\boxed{\text{等角地図}}$

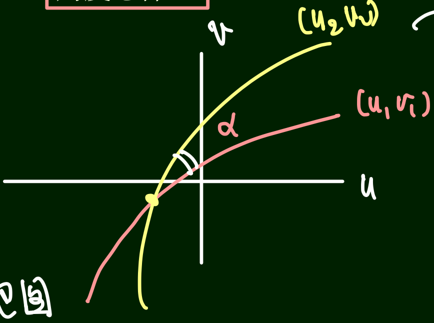
問題 2-1 (等温座標系) isothermal parameters

曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ において (u,v) が等温座標系

$\Leftrightarrow ds^2 = E(du^2 + dv^2)$.

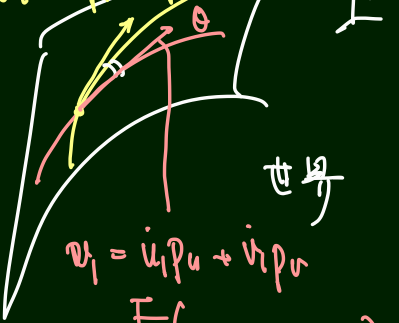
- $\boxed{\text{角度を保つ}}$

あまり気にしないで



P

$v_2 = \dot u_2 p_u + \dot v_2 p_v$



$v_1 = \dot u_1 p_u + \dot v_1 p_v$

$|v_1|^2 = E(\dot u_1^2 + \dot v_1^2)$

$|v_2|^2 = E(\dot u_2^2 + \dot v_2^2)$

$v_1 \cdot v_2 = E(\dot u_1 \dot u_2 + \dot v_1 \dot v_2)$

$\cos\theta = \dfrac{\dot u_1 \dot u_2 + \dot v_1 \dot v_2}{(---)} = \cos\alpha$

問題 2-2

問題

実数 α に対して

$$p_\alpha(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos v\cosh u - \sin\alpha\sin v\sinh u \\ \cos\alpha\sin v\cosh u + \sin\alpha\cos v\sinh u \\ u\cos\alpha - v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

問題 2-2

$$\boldsymbol{e}_1(v) := \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2(v) := \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正規直交系をなす.
- $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{d\cancel{t}\,v} = \boldsymbol{e}_2$, $\dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{d\cancel{t}\,v} = -\boldsymbol{e}_1$
- $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$.

問題 2-2

$$p = p_\alpha(u,v) = (\cos\alpha\cosh u)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\alpha\sinh u)\boldsymbol{e}_2 + (u\cos\alpha - v\sin\alpha)\boldsymbol{e}_3.$$

$$p_u = \cos\alpha\sinh u\, e_1 + \sin\alpha\cosh u\, e_2 + \cos\alpha\, e_3$$

$$p_v = -\sin\alpha\sinh u\, e_1 + \cos\alpha\cosh u\, e_2 - \sin\alpha\, e_3$$

$$|p_u|^2 = \cos^2\alpha\sinh^2 u + \sin^2\alpha\cosh^2 u + \cos^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha\,\underbrace{(1+\sinh^2 u)}_{\cosh^2 u} + \sin^2\alpha\cosh^2 u = \cosh^2 u$$

$$|p_v|^2 = \cosh^2 u$$

$$p_u\cdot p_v = \cos\alpha\sin\alpha\,\underbrace{(\cosh^2 u - \sinh^2 u)}_{1} - \cos\alpha\sin\alpha = 0$$

$$ds^2 = \cosh^2 u\,(du^2 + dv^2)$$

等温

αによらない

$$p_u = \cos\alpha \sinh u \, e_1 + \sin\alpha \cosh u \, e_2 + \cos\alpha \, e_3$$

$$p_v = -\sin\alpha \sinh u \, e_1 + \cos\alpha \cosh u \, e_2 - \sin\alpha \, e_3$$

$$p_u \times p_v = (-\sin^2\alpha \cosh u - \cos^2\alpha \cosh u) \, e_1 + 0 \, e_2 + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \cosh u \sinh u \, e_3$$

$$= \cancel{\cosh u} \, \underline{(- e_1 + \sinh u \, e_3)}$$

$$\nu = -\operatorname{sech} u \, e_1 + \tanh u \, e_3$$

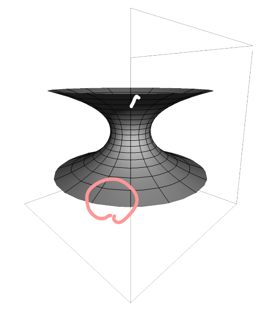
$$\nu_u = + \tanh u \operatorname{sech} u \, e_1 + \operatorname{sech}^2 u \, e_3$$

$$\nu_v = - \operatorname{sech} v \, e_2 \qquad \hat{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

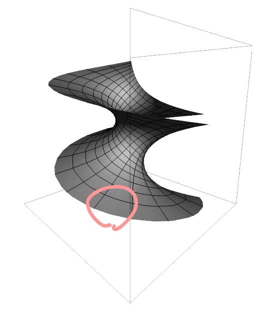
$$- p_u \cdot \nu_u = - \tanh^2 u \cos\alpha \, e_1 \mp \operatorname{sech}^2 u \cos\alpha \, e_3$$

$$= -\cos\alpha, \quad -p_u \cdot \nu_v, \quad -p_v \cdot \nu_v$$

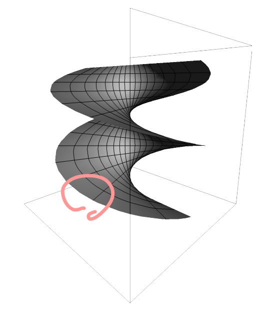
問題 2-2



$\alpha = 0$



$\alpha = \frac{\pi}{4}$



$\alpha = \frac{\pi}{2}$

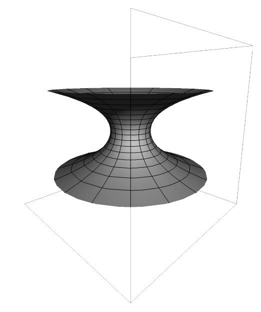
catenoid

helicoid
常螺旋面

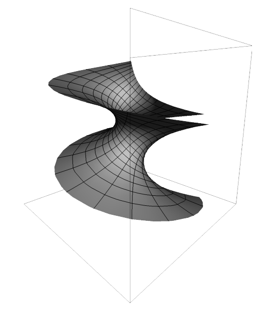
$\boxed{\text{モノサシ}}$

ds^2 : 共通

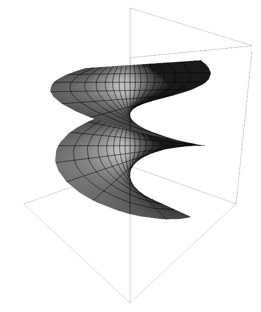
問題 2-2



$\alpha = 0$



$\alpha = \frac{\pi}{4}$



$\alpha = \frac{\pi}{2}$