幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

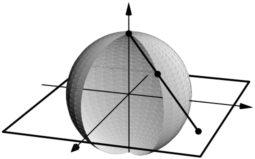
2021/12/23

問題 2-1

問題

$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 ; |\boldsymbol{x}| = 1\}$ 上の点 $\mathrm{N} = {}^t(0,0,1)$ を取る．xy 平面上の点 $\mathrm{P} = {}^t(u,v,0)$ に対して N, Q, P が同一直線上にあるような $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ 上の点 Q がただ一つ存在する．この Q を $p(u,v)$ と書くと，p は $S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ の正則なパラメータ表示を与える．この第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

問題 2-1 (立体射影)



問題 2-1

$$p(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right) \qquad \text{(立体射影)}$$

$$ds^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(du^2+dv^2),$$

$$\tilde{p}(\xi,\eta) = (\operatorname{sech}\xi\cos\eta, \operatorname{sech}\xi\sin\eta, \tanh\xi) \qquad \text{(Mercator)}$$

$$d\tilde{s}^2 = \operatorname{sech}^2\xi(d\xi^2+d\eta^2).$$

問題 2-1 (等温座標系)

曲面のパラメータ表示 $p(u, v)$ において (u, v) が等温座標系
$\Leftrightarrow ds^2 = E(du^2 + dv^2)$.

- 角度を保つ

問題 2-2

問題

実数 α に対して

$$p_\alpha(u,v) := \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos v\cosh u - \sin\alpha\sin v\sinh u \\ \cos\alpha\sin v\cosh u + \sin\alpha\cos v\sinh u \\ u\cos\alpha - v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

とおく．このとき p_α の第一基本形式，第二基本形式を求めなさい．

問題 2-2

$$\boldsymbol{e}_1(v) := \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2(v) := \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正規直交系をなす.
- $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = \boldsymbol{e}_2$, $\dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = -\boldsymbol{e}_1$
- $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$.

問題 2-2

$$p_\alpha(u,v) = (\cos\alpha\cosh u)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\alpha\sinh u)\boldsymbol{e}_2 + (u\cos\alpha - v\sin\alpha)\boldsymbol{e}_3.$$