幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/23

定義するだけ.

幾何学的意味 (多義的) のいくつかは 将来

設定

- $p(u,v)$: 正則曲面; $\nu(u,v)$: 単位法ベクトル場
- $\tilde{p}(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$; p のパラメータ変換.
  $\tilde{\nu}(\xi,\eta) = \nu(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$: $\tilde{p}$ の単位法ベクトル場.
- $\check{p} = Rp + \boldsymbol{a}$ ($R \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$) : p の合同変換
  $\check{\nu} = R\nu$: $\check{p}$ の単位法ベクトル場.

$\check{p}_u \cdot \check{\nu} = Rp_u \cdot R\nu = p_u \cdot \nu = 0$
etc

${}^t x y = x \cdot y$

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \overset{2\times 3}{\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}} \overset{3\times 2}{(p_u, p_v)} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

事実

$\widehat{I}$ の固有値は正．とくに $\widehat{I}$ は正則である．

正値

$$\left(\begin{array}{l} p_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} \\ \quad \| \\ p_{vu} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} \end{array} \right)$$

第一基本行列・第二基本行列

$$
\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}
$$

$$
\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.
$$

事実

$\widehat{I}$, $\widehat{II}$ は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない.

$\check{p} = Rp + a$

$\hat{\nu} = R\nu$

$\check{\widehat{I}} = \widehat{I}$

$\check{\widehat{II}} = \widehat{II}$

第一基本行列・第二基本行列

$\hat{\tilde{p}}(\xi,\eta) = \hat{p}(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$

- $\widetilde{\widehat{I}}$, $\widetilde{\widehat{I\!I}}$: $\tilde{p}$ の第一基本行列，第二基本行列.
- P : パラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ のヤコビ行列

$\begin{pmatrix} {}^t\hat{\tilde{p}}_\xi \\ {}^t\hat{\tilde{p}}_\eta \end{pmatrix} (\hat{\tilde{p}}_\xi \ \hat{\tilde{p}}_\eta)$

とすると

$$\boxed{\widetilde{\widehat{I}} = {}^tP\,\widehat{I}\,P,} \qquad \boxed{\widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tP\,\widehat{I\!I}\,P,}$$

$(\hat{\tilde{p}}_\xi \ \hat{\tilde{p}}_\eta)$ chain rule

$= (\hat{p}_u \ \hat{p}_v) P$

$$\boxed{\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}}, \ ?? \quad \left(P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right).$$

at $(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$

=? 思う

$$\begin{cases} du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta \\ dv \quad -\cdot \end{cases}$$

第一基本形式・第二基本形式

$\tilde{E} = \tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\xi$ $\qquad = \tilde{E}\, d\xi^2 + 2\tilde{F}\, d\xi\, d\eta + \tilde{G}\, d\eta^2$

$$ds^2 := dp \cdot dp = (du, dv)\, \widehat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

$$II := -dp \cdot d\nu = (du, dv)\, \widehat{II} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2.$$

事実

第一基本形式，第二基本形式はパラメータ変換によらない.

ワインガルテン行列

E F
F G

正則

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

定理 (ワインガルテンの公式)

$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A.$

$\widehat{II} = O \Rightarrow A = O$

$\Rightarrow \nu$: const.

系

$\widehat{II} = O$ ならば p の像は平面の一部である.

$\varphi(u,v) := (p(u,v) - p(u_0, v_0)) \cdot \nu$

p_0 とおくと

$\varphi = 0$ ($\because \varphi_u = \varphi_v = 0$)

$(x - p_0) \cdot \nu = 0$ 平面

$\because$ $\nu \cdot \nu = 1 \therefore \nu_u \cdot \nu = \nu_v \cdot \nu = 0$

$\nu_u, \nu_v \perp \nu$

$\mathrm{Span}\{p_u, p_v\}$

$\begin{pmatrix} {}^tp_u \\ {}^tp_v \end{pmatrix}(\nu_u \ \nu_v) = \begin{pmatrix} {}^tp_u \\ {}^tp_v \end{pmatrix}(p_u \ p_v)B$

$[-\widehat{II} = \widehat{I}B]$

ワインガルテン行列

$$\widehat{A} = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = ({}^tP\,\widehat{I}\,P)^{-1}({}^tP\,\widehat{II}\,P) = \boxed{P^{-1}AP}$$

定理

- ワインガルテン行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない．
- ワインガルテン行列の固有値はパラメータ変換によらない．

共役

相似

定義

Krümmung

$$\text{ガウス曲率} = K := \det A = \det \widehat{II} \,/\, \det \widehat{I},$$

$$\text{平均曲率} = H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$$

パラメータによらない

単位球面

$$
p(u,v) = {}^t\!\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right),
$$

$$
\nu(u,v) = \pm p(u,v)
$$

$$
\widehat{I} = \frac{4}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} = \mp \widehat{I},
$$

$$
A = \widehat{I}^{-1}\widehat{II} = \mp I
$$

← 単位行列

$$
\begin{cases} K = 1 \\ H = \mp 1 \end{cases}
$$

例：問題 2-2

$$p_\alpha(u,v) = (\cos\alpha\cosh u)\boldsymbol{e}_1(v) + (\sin\alpha\sinh u)\boldsymbol{e}_2(v) + (u\cos\alpha - v\sin\alpha)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_1(v) = {}^t(\cos v, \sin v, 0),\quad \boldsymbol{e}_2(v) = \boldsymbol{e}_1'(v),\quad \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \widehat{II} = -1$$

$$\widehat{I} = \cosh^2 v\, I, \qquad \widehat{II} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$K = -\operatorname{sech}^2 v, \quad \boxed{H = 0.} \iff \text{極小曲面}$$

④

例：グラフ表示

$z = f(x, y)$

$f(x,y)$ のグラフ $p(x,y) = {}^t(x, y, f(x,y))$ の場合：

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix} \qquad \det \hat{I} = 1 + f_x^2 + f_y^2$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,{}^t(-f_x \quad -f_y \quad 1)$$

$$\hat{II} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \underline{\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{xx} \end{pmatrix}}$$

yy

Hesse 行列

事実

ワインガルテン行列の固有値は実数．これらを主曲率という．

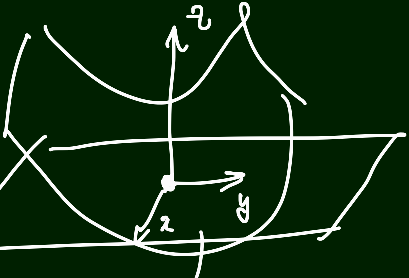
パラメータの取り方によらない…

$$\hat{I}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{II}(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}(0,0)$$

$A(0,0) = \hat{II}(0,0)$ ：対称

固有値は実



$z = f(x,y)$

$$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

問題 3-1

問題

0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して，原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える．
この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$$

を満たすものを求めなさい．

$$\left(\Phi(x) = \Phi(y)\right) = \text{const}$$

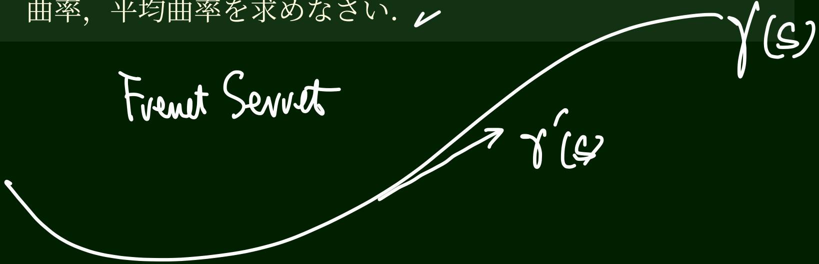
問題 3-2

問題

弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ $(a < s < b)$ の曲率関数 κ が区間 (a, b) で零点を持たないとする．このとき，$(a, b) \times \mathbb{R}$ 上で $p(s, t) := \gamma(s) + t\gamma'(s)$ と定める．

- p の特異点集合，すなわち
  $\{(s, t)\,;\, p_s(s, t)$ と $p_t(s, t)$ が一次従属$\}$ を求めなさい．✓
- p の正則点集合（特異点でない点の集合）上での p のガウス曲率，平均曲率を求めなさい．✓

Frenet Serret



問題 3-3

問題

集合 $S := \{{}^t(x,y,z)\,;\,x^4+y^4+z^4=1\} \subset \mathbb{R}^3$ は，なめらかな曲面を与える．S のガウス曲率の最大値を求めなさい．

$z = f(x, y)$

$x = f(y, z)$ ~-

Graph表示で K （陰関数の場合）

本日の課題の提出締切は

2021 年 12 月 28 日（月曜日）07:00 JST

良いお年をお迎えください