幾何学概論第二 (MTH.B212)

主曲率・ガウス曲率・平均曲率

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021/12/23

設定

- $p(u,v)$: 正則曲面; $\nu(u,v)$: 単位法ベクトル場
- $\tilde{p}(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$; p のパラメータ変換.
  $\tilde{\nu}(\xi,\eta) = \nu(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$: $\tilde{p}$ の単位法ベクトル場.
- $\check{p} = Rp + \boldsymbol{a}$ ($R \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$) : p の合同変換
  $\check{\nu} = R\nu$: $\check{p}$ の単位法ベクトル場.

第一基本行列・第二基本行列

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

事実

$\widehat{I}$ の固有値は正．とくに $\widehat{I}$ は正則である．

第一基本行列・第二基本行列

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

事実

$\widehat{I}$, $\widehat{II}$ は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない.

第一基本行列・第二基本行列

- $\widetilde{\widehat{I}}$, $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ ：$\tilde{p}$ の第一基本行列，第二基本行列.
- P ：パラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ のヤコビ行列

すると

$$\widetilde{\widehat{I}} = {}^tP\,\widehat{I}\,P, \qquad \widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tP\,\widehat{I\!I}\,P,$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \qquad \left(P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\right).$$

第一基本形式・第二基本形式

$$ds^2 := dp \cdot dp = (du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$II := -dp \cdot d\nu = (du, dv)\,\widehat{II}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

事実

第一基本形式，第二基本形式はパラメータ変換によらない．

ワインガルテン行列

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

定理 (ワインガルテンの公式)

$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A.$

系

$\widehat{II} = O$ ならば p の像は平面の一部である.

ワインガルテン行列

定理

- ワインガルテン行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない.
- ワインガルテン行列の固有値はパラメータ変換によらない.

定義

$$\text{ガウス曲率} = K := \det A = \det \widehat{I\!I} \,/\, \det \widehat{I}\,,$$
$$\text{平均曲率} = H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$$

例：問題2-1

$$
p(u,v)\ {}^t\!\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right),
$$

$$
\nu(u,v) = \pm p(u,v)
$$

$$
\widehat{I} = \frac{4}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} = \mp \widehat{I},
$$

例：問題 2-2

$$p_\alpha(u,v) = (\cos\alpha\cosh u)\boldsymbol{e}_1(v) + (\sin\alpha\sinh u)\boldsymbol{e}_2(v) \\ + (u\cos\alpha - v\sin\alpha)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_1(v) = {}^t(\cos v, \sin v, 0),\ \boldsymbol{e}_2(v) = \boldsymbol{e}_1'(v),\ \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1).$$

$$\widehat{I} = \cosh v I, \qquad \widehat{II} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$K = -\operatorname{sech}^2 v, \quad H = 0.$$

例：グラフ表示

$f(x,y)$ のグラフ $p(x,y)=(x,y,f(x,y))$ の場合：

主曲率

事実

ワインガルテン行列の固有値は実数．これらを主曲率という．

問題 3-1

問題

0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して,
原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ
$p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える.
この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$$

を満たすものを求めなさい.

問題 3-2

問題

弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ $(a < s < b)$ の曲率関数 κ が区間 (a,b) で零点を持たないとする．このとき，$(a,b) \times \mathbb{R}$ 上で $p(s,t) := \gamma(s) + t\gamma'(s)$ と定める．

- p の特異点集合，すなわち $\{(s,t)\,;\, p_s(s,t)$ と $p_t(s,t)$ が一次従属$\}$ を求めなさい．
- p の正則点集合（特異点でない点の集合）上での p のガウス曲率，平均曲率を求めなさい．

問題 3-3

問題

集合 $S := \{{}^t(x, y, z)\,;\, x^4 + y^4 + z^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ は，なめらかな曲面を与える．S のガウス曲率の最大値を求めなさい．