2021 年 12 月 23 日 (2022 年 1 月 6 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 3

■お知らせ

- 今回は 34 名の方から課題の提出がありました．
- 2021 年の講義は今回が最終，次回は 2022 年 1 月 6 日となります．良いお年をお迎えください．
- 課題の提出期限は従来どおり来週月曜日，12 月 27 日の 07:00 JST です．遅くしてほしいというご意見もあるでしょうが，こんなもので年末年始をつぶさないでほしいという配慮とお考えください．

■前回の補足

- 「2 次形式の表現行列」とは何かというご質問が複数. (1) $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V 上の双線形形式とは写像 $b\colon V\times V\to\mathbb{R}$ で [a] $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, [b] $b(s\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=sb(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+tb(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$（$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}\in V$, s, $t\in\mathbb{R}$）を満たすものである．(2) V の内積とは V 上の双線形形式で，正値性 [c] $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$（$\boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ を満たすものである．(3) V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ ($n=\dim V$) に対して対称行列 $(b(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j))_{i,j=1,\dots,n}$ を双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ に関する表現行列という．
- 単位法ベクトル場のとり方に二通りあり，第二基本形式は符号が変わる，というご指摘が複数ありました．そのとおりで，第二基本形式は ν のとり方によります．その符号を気にする場合もあるし気にしない場合もあります．
- 微分 du, dv について考察をしてくださった方がいらっしゃいます．概ね正しいのですが「多様体上の関数等」と考えるのが自然です．多様体を学ぶ際に思い出しましょう．
- 第一基本形式と第二基本形式があれば曲面が決まるのか？ というご質問が複数．黒板 C の 1 ページ．
- 第二基本形式の幾何学的意味についての質問が複数．今回言及する．講義資料の「グラフ表示」の項．

■前回までの訂正

- 講義資料 2, 3 ページ, 13 行目，最右辺の行列の $(2,1)$-成分：$p_v\cdot p_v \Rightarrow p_v\cdot p_u$
- 講義資料 2, 3 ページ，下から 2 行目：$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x_1,x_2)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$（対称なので間違いではないが）
- 黒板 C, 1 ページ：2023.1 ⇒ 2022.1

■授業に関する御意見

- 質問を考えるのが難しいですが，演習問題よりも配点を高くするの良い案ですね．　**山田のコメント：** でしょ．
- 「$df=f_x\,dx+f_y\,dy$」や「$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$」のような微分量を用いた形式的な表現がどのように正当化されるかに興味があります．　**山田のコメント：** 微分形式，テンソルなどの言葉で正当化されます．
- 私の人生の中で計算量の多い問題 top 3 に入るほどの問題でした（2-2 の話ですよね）．次回，この問題の工夫したやり方等がきけることを楽しみにしております．　**山田のコメント：** そんなに大変？
- 計算が…　**山田のコメント：** そう？
- ウワサの地獄の微分幾何計算を痛感しました．ツライ．　**山田のコメント：** まだ全然地獄ではないと思います．

■質問と回答

質問 1： $\widetilde{\widehat{I}}={}^tP\,\widehat{I}\,P$ という関係は行列の対角化と関係がありますか.

お答え： あるともないとも言えるが，P^{-1} でなく ${}^tP$ であることに注意.「二次形式」を学ぶと出てきますね.

質問 2： 第一基本形式はパラメータのとり方によらないと資料に書かれていましたが，2-2 の第一基本形式がパラメータ u を含んでいるのは何故でしょうか．計算ミスだったらごめんなさい．

お答え： 計算ミスではありません．「パラメータのとり方によらない」は，講義資料 2 の 3 ページ，19 行目「すなわち」以下の意味で使っています．

質問 3： $p(u,v)={}^t(u,v,0)$ の第二基本形式が 0 であると計算してみて分かりました．このことから，曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ に対して “p が平面” ⇒ “U 上で p の第二基本形式が 0” が分かるのですが，この逆は成り立つでしょうか？ あるいは第二基本形式が 0 であるにもかかわらず平面でないような曲面は存在するでしょうか.

お答え： 逆が成立します. 実際 $I\!I=0 \Rightarrow \nu$ は一定 $\Rightarrow p$ は平面というルートで示せます．最初の矢印は今回説明するワインガルテンの公式．次は $f(u,v):=(p(u,v)-p(u_0,v_0))\cdot\nu$ を u, v で微分する（捩率零の空間曲線が平面曲線であることを示した時と同じ).

質問 4： 第一基本量では E, $G>0$ や $\det\widehat{I}>0$ などの性質がありますが，第二基本量では $L<0$ や $\det\widehat{I\!I}<0$ となることが 2-2

で分かりました．また $p = {}^t(u, v, u^2)$ とすると $p_u = {}^t(1, 0, 2u)$, $\nu_u = {}^t(-2, 0, -4u)/(1+4u^2)^{3/2}$ より $L = -p_u \cdot \nu_u > 0$ となることも分かり，L の正負は特に決まらないことが分かりました．第二基本量は何か良い性質を持っているのでしょうか？

お答え： 今回，および 1 月にもう少し説明しますが，原点で xy 平面に接する曲面を $z = f(x, y)$ とグラフ表示すると f のヘッセ行列が第二基本行列になります．微積分でやった極値判定を思い出すと第二基本量の意味がわかりそうです．

質問 5： 第一基本形式の ds^2 は幾何学的意味ではどのようなものでしょうか．$p(u, v)$ と $p(u + \Delta u, v + \Delta v)$ の 2 点間の距離の差（山田注：距離ですよね，差でなく）を Δs としていることは分かるのですが，第一基本形式という名前で呼ばれているので，距離以外の意味があると思いました．

お答え： ds と書くと距離，と見えますが，二次形式とみなすと距離以外のさまざまな意味がありますね．

質問 6： 第一基本形式は ds^2 で表されてますが第二基本形式のようにローマ数字の I と表してもいいと思います．ds^2 と表したことに何か意味はありますか．$\widehat{III} = \binom{{}^t\nu_u}{{}^t\nu_v}(\nu_u, \nu_v)$ とし，$III = (du, dv)\,\widehat{III}\binom{du}{dv}$ とすると III はパラメータによらない．III を第三基本形式として考えることはありますか． **お答え：**前半：I を単位行列としたかった．後半：はい，案外よくつかいます．

質問 7： 第一基本形式は合同変換で不変であることは分かったのですが，どのようにしてこの第一基本形式の概念がうまれたのですか？ 第二についても同様です．どのようにしてこの計算にいたったかを知りたいです．

お答え： アイデアはガウスらしい. C. F. Gauss, “Disquisitiones generales circa superficies curvas”, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingesis Recentiores Vol. VI (1827), pp. 99–146.

質問 8： 3Q の第 1 回で “E” は他の記号で使うから単位行列は E でなく I と書くと言っていた記憶がありますが，これは第一基本量の E でしょうか． **お答え：**はい．ガウスに敬意を表して．

質問 9：（山田注：第二基本形式が ν によることに言及）符号の違いは曲面の向きの違いということですか？ もしそうなら，向き付け不可能な曲面だとどうなりますか？

お答え： 単位法ベクトルの向きの違いですね．単位法ベクトルを用いて曲面に向きを定義するなら向きの違いとなります．向き付け不可能な曲面では単位法ベクトル場が曲面全体では well-defined ではないので，局所的にしか II が定義できないことになります．ベクトル値関数 $L\nu$ などを考えればこれは ν のとりかたによりませんね．

質問 10： 二次元の正則曲面の第一基本形式の定義の仕方に倣って n 次元曲面 $p(u_1, \dots, u_n)$ で “第一基本形式”: $ds^2 = dp \cdot dp = \sum_{i,j=1}^n p_{u_i} \cdot p_{u_j}\, du_i\, du_j$ が定義できそうです．これは良い情報を持っていますか？ $n = 1$ では長さの情報を持っていそうです．$n = 2$ は講義で与えられました．

お答え： 弧長の情報を持っていることはすぐに分かりますね．角度も．n 次元の体積も大丈夫.（先走ると）定義域上の「リーマン計量」を与えているので，それから定まる量の情報は全て持っていることになります．

質問 11： 第一基本形式，第二基本形式は $\mathbb{R}^n$ 上でも考えられますか． **お答え：**はい．

質問 12： 微分は接平面を接点を原点とする線型空間とみなしたときに，パラメータのとり方に関係なくこの線型空間の元と対応しているのが想像できますが，du^2 や $du\,dv$ が何なのか，何の元なのかよくわからない．テンソル積ってやつですか？

お答え： はいそうです．$du^2 = du \otimes du$, $du\,dv = \frac{1}{2}(du \otimes dv + dv \otimes du)$ です．深入りしません．

質問 13： 1-1 の問題の解説で出た $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を使うと 1-1 が何故上手く解けるのでしょうか．

お答え： (1) u に依存する部分と v に依存する部分がきれいに分離する．(2) $\boldsymbol{e}_j$ の微分がきれいにかける．

質問 14： 2-2 を解くと気持ちよいくらいに $\sin^2 v + \cos^2 v$ や $1 + \sinh^2 u$ が出てきた．このようにうまく計算が出来る問題をどう作っているのか？ 背景があって結論から作っている？ 自分で問題を作ると計算が煩雑になってしまう．

お答え： はい，おっしゃるとおりで「語りたい物語」がある例になっています．今回説明します．

質問 15： 3-1 (原文ママ：2-1?) を解いているとき，単位円が $\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ と $\begin{pmatrix}\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \frac{2t}{1+t^2}\end{pmatrix}$ の 2 つの表し方があり，$\tan\theta = \frac{t}{2}$ という関係があった話と同じことが起こっていると思い，球面を ${}^t(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, -\cos\theta)$ として (θ, φ) と (u, v) の間の関係 $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{u^2 + v^2}$，$\tan\varphi = v/u$ を使って $\theta = 2\arctan\sqrt{u^2 + v^2}$，$\varphi = \arctan v/u$ としてヤコビ行列をつかって解こうとしたんですが，v/u が $u = 0$ の上で定義できないしそもそも ${}^t(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, -\cos\theta)$ が正則でないから，パラメータ変換（微分同相）でないからこの方針では不可能という判断をしました．この判断は正しかったでしょうか．

お答え： なるほど．正則ではないといってもほとんどの点で正則，$\arctan v/u$ は $u = 0$ での well-defined などこのままでも（定義域を縮めて）なんとかできそう．答えを出してから，あとで「まずい点でも大丈夫」であることを示せばよいのでは？

質問 16： 平面曲線で曲率から全曲率，それによるホモトピー同値性との同値の条件が定まるならば，空間曲面では「曲率」（第 1, 第 2 基本量？）から「全曲率」やホモトピー同値性との関係もあるのだろうか．

お答え： 全曲率（ガウス曲率の総和）と位相不変量との関係では，ガウス・ボンネの定理（2 月に説明する予定）があります．

質問 17： 曲面をプロットしますと，非常に小さなメッシュで構成されていることが分かります．これらの小さなメッシュのエッジはその位置における接空間の基底と同じものですか？

お答え： 近似的には，はい．

質問 18： 第一基本形式 ds^2 の幾何学的な意味がイマイチ分かりません．ds^2 とは曲面におけるどんな量を表したものなのでしょうか．

お答え： どのへんまで分かっているか教えて頂けませんか？（イマイチとは「今一つ」のことだと思います．違ったらごめん．今一つというのは，ゴールまでたどり着いていないがその少し手前まで行っているという意味だと思います．どの辺までたどりついているかがわかるとお答えしやすいです.）

質問 19： 曲面のパラメータが 3 つ以上になることはありますか？ **お答え：**「曲面」で何を指すかによります．

質問 20： 第三基本量はあるのでしょうか． **お答え：**はい．

3 主曲率・ガウス曲率・平均曲率

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された正則曲面, ν を p の単位法ベクトル場とする．さらに $\varphi\colon V \ni (\xi,\eta) \mapsto \varphi(\xi,\eta) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ を領域 $V \subset \mathbb{R}^2$ から U への微分同相, $\tilde{p} := p\circ\varphi$, $\check{p} := Rp + \boldsymbol{a}$ ($R \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$) とする．$\tilde{p}$, $\check{p}$ の単位法ベクトル場として，それぞれ $\tilde{\nu} := \nu\circ\varphi$, $\check{\nu} := R\nu$ をとっておく．

■第一・第二基本形式（復習） 正則曲面 p の第一基本行列 $\widehat{I}$, 第二基本行列 $\widehat{II}$ は次のように定義された：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v \\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v \end{pmatrix}$$
$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (\nu_u, \nu_v) = -\begin{pmatrix} p_u\cdot \nu_u & p_u\cdot \nu_v \\ p_v\cdot \nu_u & p_v\cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu}\cdot \nu & p_{uv}\cdot \nu \\ p_{vu}\cdot \nu & p_{vv}\cdot \nu \end{pmatrix}.$$

事実 3.1. 第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正．とくに $\widehat{I}$ は正則である．

$\widehat{I}$ は実対称行列だから，固有値は実数．とくに恒等式 $\det \widehat{I} = |p_u \times p_v|^2$ より $\det \widehat{I} > 0$．また $\operatorname{tr} \widehat{I} = |p_u|^2 + |p_v|^2 > 0$.

事実 3.2. 第一基本行列，第二基本行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない．

$\check{p}_u = Rp_u$, $\check{p}_v = Rp_v$ であるから $\check{\nu} := R\nu$ とおけば，R が直交行列であることから $\check{\nu}$ は $\check{p} = Rp + \boldsymbol{a}$ の単位法ベクトル場．これを用いて $\check{p}$ の第一基本行列，第二基本行列を求めれば内積の直交行列による不変性により結論を得る．

さらに第一基本形式 ds^2，第二基本形式 II を次で定義した：

$$ds^2 := dp\cdot dp = (du, dv)\, \widehat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$II := -dp\cdot d\nu = (du, dv)\, \widehat{II} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

事実 3.3. 第一基本形式，第二基本形式はパラメータ変換によらない．

正則曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ の第一基本行列，第二基本行列をそれぞれ $\widetilde{\widehat{I}}$, $\widetilde{\widehat{II}}$ とおくと，チェイン・ルールから次が成り立つ：

$$\widetilde{\widehat{I}} = {}^t P\, \widehat{I}\, P, \qquad \widetilde{\widehat{II}} = {}^t P\, \widehat{II}\, P, \qquad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \qquad \left(P = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right).$$

■ワインガルテン行列 正則曲面 p に対して，次の 2×2-行列値関数 A を**ワインガルテン行列**とよぶ．

$$A := \widehat{I}^{-1}\, \widehat{II} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

定理 3.4 (ワインガルテンの公式)**.** $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

証明： $\nu\cdot\nu = 1$ の両辺を u, v で微分すると $\nu \perp \nu_u$, $\nu \perp \nu_v$ を得る．したがって ν_u, ν_v は p_u, p_v の線形結合で表される：$(\nu_u, \nu_v) = (p_u, p_v)B$．ただし B は 2×2-行列に値をもつ (u,v) の関数．両辺に (p_u, p_v) の転置行列を左から書けると $-\widehat{II} = \widehat{I}B$.

補題 3.5. (a) ワインガルテン行列は $\mathbb{R}^3$ の合同変換によらない．

(b) ワインガルテン行列の固有値はパラメータ変換によらない．

2021 年 12 月 23 日 (2022 年 1 月 6 日訂正)

証明： $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ が合同変換によらないので (a) が従う．パラメータ変換により得られる曲面 $\tilde{p}$ のワインガルテン行列は $\widetilde{A} = \widetilde{\widehat{I}}^{-1}\widetilde{\widehat{I\!I}} = ({}^t P\,\widehat{I}\,P)^{-1}({}^t P\,\widehat{I\!I}\,P) = P^{-1}AP$ なので (b) を得る．

定義 3.6. ワインガルテン行列の固有値の積 K を**ガウス曲率**，固有値の平均 H を**平均曲率**という：$K := \det A = \det \widehat{I\!I} \,/\, \det \widehat{I}$, $H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$.

■例：グラフ表示 関数 $f(x,y)$ のグラフ $p(x,y) = {}^t(x, y, f(x,y))$ に対して $\delta := 1 + f_x^2 + f_y^2$ とおくと $\nu(x,y) = {}^t(-f_x, -f_y, 1)/\delta^{1/2}$ は単位法線ベクトル場．このとき

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{\delta^2}, \quad H = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{2\delta^{3/2}}.$$

補題 3.7. 正則曲面 $p(u,v)$ が (u_0,v_0) において $p(u_0,v_0) = \mathrm{O}$（座標原点），$\nu(u_0,v_0) = \pm{}^t(0,0,1)$ を満たしているならば，座標変換 $\varphi := (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$（$\varphi(0,0) = (u_0,v_0)$）と $(0,0)$ の近くで定義された C^∞-級関数 $f(x,y)$ が存在して次が成り立つ：

$$\tilde{p}(x,y) = p \circ \varphi(x,y) = {}^t(x, y, f(x,y)), \qquad f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

証明： $p(u,v) = {}^t(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と書くと，$p_u \times p_v$ の第 3 成分が (u_0,v_0) において零でないことにより $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ は (u_0,v_0) の近傍で微分同相写像となる（逆写像定理）．その逆写像を $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$，$f(x,y) := z \circ \varphi(x,y)$ とおくと結論が満たされる．

系 3.8. ワインガルテン行列の固有値は実数である．これらを p の**主曲率**という．

証明： 点 (u_0,v_0) を固定すると，$\mathbb{R}^3$ の合同変換で補題 3.7 の状況が満たされる．このグラフ表示の原点で $\widehat{I}$ が単位行列となるから A は対称行列．

例 3.9. 問題 2-1 において $K = 1$, $H = \pm 1$，問題 2-2 において $K = -\operatorname{sech}^4 u$，$H = 0$.

問題

3-1 0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して，原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える．この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．（ヒント：xy-平面上の領域 U の各点 (x,y) で $\varphi(x) = \psi(y)$ が成り立つなら，この両辺は定数．）

3-2 弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ $(a < s < b)$ の曲率関数 κ が区間 (a,b) で零点を持たないとする．このとき，$(a,b) \times \mathbb{R}$ 上で $p(s,t) := \gamma(s) + t\gamma'(s)$ と定める．
- p の特異点集合，すなわち $\{(s,t)\,;\, p_s(s,t)$ と $p_t(s,t)$ が一次従属$\}$ を求めなさい．
- p の正則点集合（特異点でない点の集合）上での p のガウス曲率，平均曲率を求めなさい．

3-3 集合 $S := \{{}^t(x,y,z)\,;\, x^4 + y^4 + z^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ は，次の意味でなめらかな曲面を与える：

任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，$\mathbb{R}^3$ における P の近傍 V と，$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された曲面の正則パラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が存在して，$p(U) = V \cap S$ が成り立つ．

実際，$\mathrm{P} = {}^t(a,b,c) \in S$ が $c \neq 0$ を満たすなら，陰関数定理より P の近傍で S は $z = f(x,y)$ とグラフ表示される．$c = 0$ のときは a, b のいずれかが零でないので同様の議論で結論が得られる（端折っているので各自確かめよ；ただしこれは課題ではない）．以上を認めて，S のガウス曲率の最大値を求めなさい．