幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス曲率・平均曲率の意味

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/06

第一基本行列・第二基本行列

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\{p_u\ p_v\}$: 1次独立

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとっておく：

$p_u \perp \nu$ $\quad p_v \perp \nu$ $\quad |\nu| = 1$

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix},$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

- $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ は対称行列.
- $\widehat{I}$ は正値，すなわちすべての固有値は正．とくに $\det \widehat{I} > 0$.

${}^t x\, \widehat{I}\, x > 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\|$ $\quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\quad v = \alpha p_u + \beta p_v$

$v \cdot v$

ガウス曲率・平均曲率

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} \qquad \text{(ワインガルテン行列)}$$

$\widehat{II}\,\widehat{I}^{-1}$?

パラメータ変換 $A \mapsto P^{-1}AP$

λ_1, λ_2

- A の固有値はパラメータのとり方によらない実数（主曲率）.
- $\boxed{\text{ワインガルテンの公式 } (\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A.}$

$$K := \det A \quad \text{(ガウス曲率)}, \qquad H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A \quad \text{(平均曲率)}$$

$$\nu_u = -A^1_1 p_u - A^2_1 p_v$$

$$\nu_v = -A^1_2 p_u - A^2_2 p_v$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix}$$

$\nu_u \perp \nu$

$(\nu \cdot \nu) = 1$

$\nu_u = \star p_u + \star p_v$

問題 3-1

問題

0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して, 原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ $p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える.

移動曲面

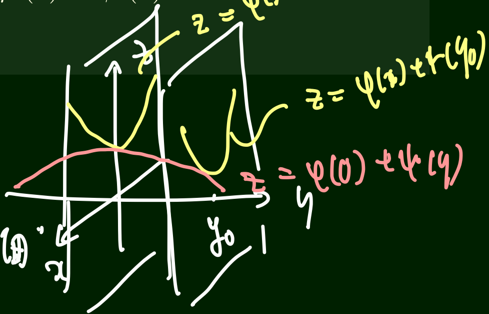
この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で

極小

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$$

を満たすものを求めなさい.

" $z = \varphi(x)$ のグラフを $z = \psi(y)$ のグラフにそって移動させた曲面



$z = f(x,y)$ のグラフ

$$2H = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}^{\,3}}\left((1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}\right)$$

$$= 0$$

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

$f_x = \dot{\varphi}$, $f_y = \psi'$

$\dot{} = \frac{d}{dx}$, $' = \frac{d}{dy}$, $f_{xy} = 0$

$H = 0$

$$\Leftrightarrow (1+\psi'^2)\ddot{\varphi} + (1+\dot{\varphi}^2)\psi'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{\varphi}}{1+\dot{\varphi}^2} = -\frac{\psi''}{1+\psi'^2} = k \quad (定数)$$

$\frac{d}{dx}$ $\quad$ 0

x の関数 $\quad$ y の関数

$$\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2} = k \qquad \underline{\underline{kx}} = \int_0^x k\,dx = \int_0^x \frac{\varphi''(u)\,du}{1+\varphi'(u)^2} \circledast$$

$$\circledast = \int_{\varphi'(0)}^{\varphi'(x)} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \tan^{-1}\xi \Big|_{\varphi'(0)=0}^{\varphi'(x)} = \underline{\underline{\tan^{-1}\varphi'(x)}}$$

$$\underline{\underline{\varphi'(0)=0}}$$

$$\varphi'(x) = \tan kx \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{k}\lg\cos kx$$

$$\psi(y) = \frac{1}{k}\lg\cos ky$$

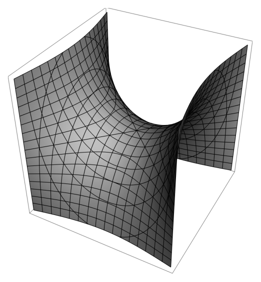
$$f(x,y) = \frac{1}{k}\left(-\lg\cos kx + \lg\cos ky\right)$$

$$= \frac{1}{k}\lg\frac{\cos ky}{\cos kx}$$

問題 3-1

$$\varphi(x) = -\frac{1}{k}\log\cos kx,$$
$$\psi(x) = \frac{1}{k}\log\cos ky,$$

$$f(x,y) = \frac{1}{k}\log\frac{\cos ky}{\cos kx}$$



シャーク曲面

$(H=0)$

問題 3-2

Frenet 枠 が well-def

問題

弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ $(a < s < b)$ の曲率関数 κ が区間 (a, b) で零点を持たないとする．このとき，$(a, b) \times \mathbb{R}$ 上で $p(s, t) := \gamma(s) + t\gamma'(s)$ と定める．

- p の特異点集合，すなわち
  $\{(s, t)\, ;\, p_s(s, t)$ と $p_t(s, t)$ が一次従属$\}$ を求めなさい．
- p の正則点集合（特異点でない点の集合）上での p のガウス曲率，平均曲率を求めなさい．

γ''

$\{e, n, b\}$: γ のフルネ枠．　τ: 捩率

接線曲面

tangent developable

$p(s,t) = \gamma(s) + t\,\mathbf{e}(s)$ $\qquad$ $p_s = \mathbf{e} + t\,\mathbf{e}'$ $\qquad$ $p_t = \mathbf{e}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \mathbf{e} + \kappa t \mathbf{n}$

p_s と p_t が1次従属 $\iff$ $\underline{\kappa t = 0}$ $\qquad$ $(\kappa > 0)$

という点集合 $\{(s,t) \mid t = 0 \ \cancel{\text{or } t = \tfrac{1}{\kappa}} \}$

削除

$\underline{\nu = (\pm)\,\mathbf{b}}$ (従法線)

$p_{ss} = \mathbf{e}' + \kappa' t \mathbf{n} + \kappa t \mathbf{n}' = 0\,\mathbf{e} + 0\,\mathbf{n} + \kappa t \tau \mathbf{b}$

$p_{st} = \mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}$ $\qquad$ $p_{tt} = 0$

$L = p_{ss} \cdot \nu = \kappa t \tau$ $\qquad$ $M = 0$ $\qquad$ $N = 0$

$E = p_s \cdot p_s = 1 + \kappa^2 t^2$, $\qquad$ $F = 1$ $\qquad$ $G = 1$

問題 3-2

訂正

$$(\text{特異点集合}) = \cancel{\left\{ (s,t) \,;\, t = \frac{1}{\kappa(s)} \right\}} \cup \{(s,0)\},$$

$$\boxed{K = 0,} \quad H = \frac{\tau(s)}{2t\kappa(s)}.$$

平坦曲面　flat surface

問題 3-3

問題

集合 $S := \{{}^t(x, y, z)\,;\, x^4 + y^4 + z^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ は，なめらかな曲面を与える．S のガウス曲率の最大値を求めなさい．

$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$　　$S = F^{-1}(\{0\})$

$dF = 4(x^3, y^3, z^3) \neq (0, 0, 0)$ on S　正則値

とくに $z \neq 0$ となる点の近傍で $\boxed{z = f(x, y)}$ とグラフ表示できる（陰関数定理）

$$\boxed{F(x, y, f(x, y)) = 0}$$

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3}, \quad f_y = -\frac{y^3}{z^3} \qquad z = f(x,y)$$

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, \underset{z}{f(x,y)})$$

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{1}{z^6}(x^6 + y^6 + z^6)$$

$$f_{xx} = \left(-\frac{F_x}{F_z}\right)_x = \frac{-\left((F_{xx} + \cancel{F_{xz} f_x}) F_z - F_x(\cancel{F_{zx}} - F_{zz} f_x)\right)}{(F_z)^2}$$

$$= -\frac{3x^2}{z^7}(x^4 + z^4) \qquad \text{etc} \cdots$$

$$K = \frac{9 x^2 y^2 z^2}{(x^6 + y^6 + z^6)^2} \quad \left((x, y, z) \in S \right)$$

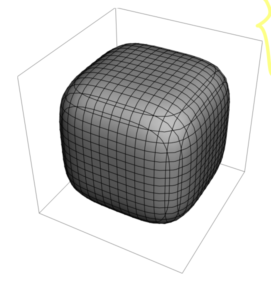
z=0のときも成立

問題 3-3

$$K = \frac{9x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2},$$

条件付極値

(最大値) $= 3\sqrt{3}$



$\{(x,y,z) \mid x^4+y^4+z^4-1=0\}$ という

条件のもと

$$\frac{9x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2}$$

の最大値を求めよ。

有界閉集合

$\Downarrow$

(Kは最大 最小をとる)

$x=y=z$