幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス曲率・平均曲率の意味

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/06

第一基本行列・第二基本行列

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとっておく：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix},$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

- $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ は対称行列.
- $\widehat{I}$ は正値, すなわちすべての固有値は正. とくに $\det \widehat{I} > 0$.

ガウス曲率・平均曲率

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} \qquad \text{(ワインガルテン行列)}$$

- A の固有値はパラメータのとり方によらない実数（主曲率）.
- ワインガルテンの公式 $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

$$K := \det A \quad \text{(ガウス曲率)}, \qquad H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A \quad \text{(平均曲率)}$$

問題 3-1

問題

0 を含む開区間で定義された二つの C^∞-級関数 φ, ψ に対して,
原点の近傍で定義された関数 $f(x,y) := \varphi(x) + \psi(y)$ のグラフ
$p(x,y) := {}^t(x, y, f(x,y))$ は正則曲面を与える.
この曲面の平均曲率が恒等的に零となる φ, ψ で

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$$

を満たすものを求めなさい.

問題 3-2

問題

弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ $(a < s < b)$ の曲率関数 κ が区間 (a, b) で零点を持たないとする．このとき，$(a, b) \times \mathbb{R}$ 上で $p(s, t) := \gamma(s) + t\gamma'(s)$ と定める．

- p の特異点集合，すなわち $\{(s, t)\,;\, p_s(s, t)$ と $p_t(s, t)$ が一次従属$\}$ を求めなさい．
- p の正則点集合（特異点でない点の集合）上での p のガウス曲率，平均曲率を求めなさい．

問題 3-3

問題

集合 $S := \{{}^t(x,y,z)\,;\, x^4+y^4+z^4=1\} \subset \mathbb{R}^3$ は，なめらかな曲面を与える．S のガウス曲率の最大値を求めなさい．