# 幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス曲率・平均曲率の意味

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/06

# 曲線の法曲率

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；
$\nu$：$p$ の単位法ベクトル場；
$\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$：固定

曲面上の一点の近くでの性質を考えたい

$\gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$：曲面上の曲線，$\gamma(0) = \mathrm{P}$；

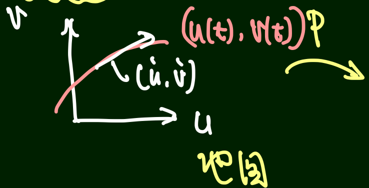
$|\dot\gamma|^2 = |\dot u p_u + \dot v p_v|^2 = 1$

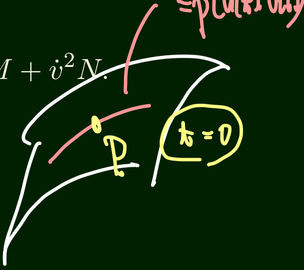
- $t$ が $\gamma$ の弧長 $\Leftrightarrow \dot u^2 E + 2\dot u \dot v F + \dot v^2 G = 1$
- このとき

normal curvature $\ddot\gamma \cdot \nu$

$$(\text{法曲率}) := \gamma'' \cdot \nu = \dot u^2 L + 2\dot u \dot v M + \dot v^2 N.$$

$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$



$$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$$

- $\dot{\gamma}(t) = \dot{u}\, p_u + \dot{v}\, p_v \qquad p_u = p_u(u(t), v(t))$ etc.

$$1 = |\dot{\gamma}|^2 = \dot{u}^2\, p_u \cdot p_u + 2\dot{u}\dot{v}\, p_u \cdot p_v + \dot{v}^2\, p_v \cdot p_v$$
$$= \dot{u}^2 E + 2\dot{u}\dot{v} F + \dot{v}^2 G.$$

- $\ddot{\gamma}(t) = \ddot{u}\, p_u + \ddot{v}\, p_v + \dot{u}(\dot{u}\, p_{uu} + \dot{v}\, p_{uv}) + \dot{v}(\dot{u}\, p_{vu} + \dot{v}\, p_{vv})$

$$= \ddot{u}\, p_u + \ddot{v}\, p_v + \dot{u}^2 p_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}\, p_{uv} + \dot{v}^2 p_{vv}$$

$p_{uu} \cdot \nu = L$ etc. $\qquad p_u \cdot \nu = 0$

法曲率 $\qquad \ddot{\gamma} \cdot \nu = \dot{u}^2 L + 2\dot{u}\dot{v} M + \dot{v}^2 N$

$\ddot{u}, \ddot{v}$ は含まれない

# 法曲率

## 定義

単位

- $\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$：曲面の P における接ベクトル
- $\gamma(t)$：曲面上の弧長 $t$ をパラメータとする曲線で $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v}$ となるもの

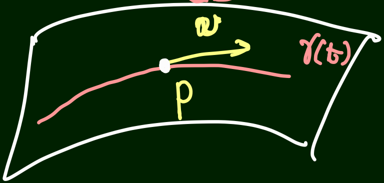
$\kappa_n(v) = \ddot{\gamma} \cdot \nu$

このとき $\gamma$ の $t = 0$ における法曲率を
曲面の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率とよび $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ とかく.

## 定理

曲面上の点 P における法曲率の最大値・最小値は主曲率である.

主曲率の幾何学的いみ



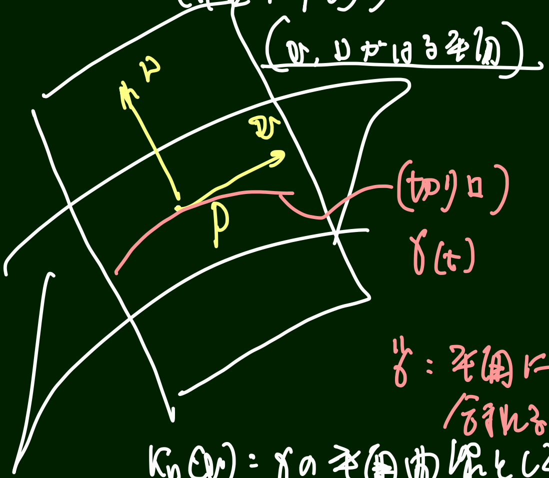
$k_n(v) := \alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N$

$v = \alpha p_u + \beta p_v$ at $(u_0, v_0)$

(条件 $\alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G = 1$ (単位ベクトル))

$v$方向の法曲率

($v$, $n$ がはる平面)




$\gamma$: 平面に含まれる

$k_n(v)$ = $\gamma$の平面曲線としての曲率

・ $h(\alpha,\beta) = \alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N$

の条件 $g(\alpha,\beta) = \alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 N = 1$

の下での最大・最小を求める

(条件付き極値)

Lagrange's multiplier

$\Phi = h - \lambda(g-1)$ とおいて

$\Phi_\alpha = \Phi_\beta = \Phi_\lambda = 0$ となる点？

$$\underbrace{\hat{\mathrm{I}}^{-1}\hat{\mathrm{II}}}_{A}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \lambda \cancel{\hat{\mathrm{I}}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \to \boxed{\alpha p_u + \beta p_v}$$

主方向

# 主方向

## 定義

- $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率となるとき $\boldsymbol{v}$ の方向を主方向とよぶ.
- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ なるとき $\boldsymbol{v}$ の方向を漸近方向とよぶ.

## 命題

主曲率 $\lambda$ に対応する主方向のベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$$

と書くと, ${}^t(\alpha, \beta)$ は $A$ の $\lambda$-固有ベクトル.

# 主方向

2つの主曲率が一致するような曲面上の点を臍点という．

あらゆる方向の法曲率が同じ

$A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 定理

臍点でない点において，ふたつの主方向は直交する．

$\phi(x, y) = {}^t(x,\ y,\ f(x, y))$ $\quad f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0)$

の原点を考えればよい $\quad \nu(0,0) = {}^t(0,\ 0,\ 1)$

$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{II} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ at $(0,0)$

$p_u = {}^t(1,\ 0,\ 0) \quad p_v = {}^t(0,\ 1,\ 0)$

$A = \hat{II}$；対称．$A$の固有ベクトルは互いに直交

対応する $\alpha p_u + \beta p_v = {}^t(\alpha,\ \beta,\ 0)$ も直交

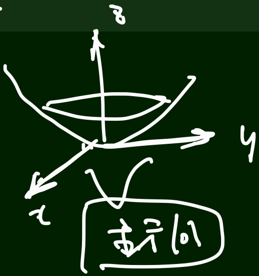
# 主方向

## 系

点 P が臍点でないとするとき,
- P = O (座標原点)
- $\nu(u_0, v_0) = {}^t(0, 0, 1)$,
- ${}^t(1, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 0)$ はそれぞれ P における主曲率 $\lambda_1$, $\lambda_2$ に関する主方向, となるようにできる.

$$A = \hat{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$



# 標準形

## 命題

曲面の点 P における主曲率を $\lambda_1$，$\lambda_2$ とするとき，P を座標原点に移す $\mathbb{R}^3$ の合同変換と曲面のパラメータ変換により，原点の近傍で曲面は次のようにグラフ表示できる：

$$\boxed{p(x,y) = (x, y, f(x,y))}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2).$$

Cor $K = \lambda_1\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ 曲面は接平面の一方の側

$K = \lambda_1\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ 2つの漸近方向 (?)

曲面と接平面の共通部分は漸近方向に接する2曲線

# 問題 4-1

## 問題

$\lambda_1 = \lambda_2$

正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ のすべての点が臍点であるとき，$p$ の像は平面か球面の一部であることを示しなさい．

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nu_u = \cdots \\ \nu_v = \cdots \end{cases}$$

(Weingarten の式)

$\boxed{\nu_{uv} = \nu_{vu}}$ $\Rightarrow$ $\lambda =$ 一定.

$\lambda = 0$ : 平面

$\lambda \neq 0$ $\quad p + \lambda\nu$ : 一定

$\Rightarrow$ 球面

# 問題 4-2

## 問題

H=0

極小曲面の臍点はガウス曲率が零となる点であることを示しなさい．さらに，ガウス曲率が負となる極小曲面上の点では漸近方向が直交することを示しなさい．

# 問題 4-3

## 問題　接線曲面 (3-2)

弧長 $u$ によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(u)$ の曲率が零点を持たないとき，$p(u,v) := \gamma(u) + v\gamma'(u)$ で与えられる曲面の正則点におけるガウス曲率は零である（問題 3-2）．この状況で，$p$ の第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるようなパラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ を求めなさい．

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

# 問題 4-4

平均曲率の幾何を見てみ

## 問題

領域 $D$ 上で定義された正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル $\nu$ をとり，実数 $t$ に対して $p_t := p + t\nu$ とおく．有界領域 $\Delta \subset D$ において

- 正の数 $\varepsilon$ で，任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $p_t\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えるようなものが存在することを示しなさい．
- $p_t(\overline{\Delta})$ $(|t| < \varepsilon)$ の面積を $A(t) := A_{p_t}(\overline{\Delta})$ と書くとき，

$$\frac{d}{dt}\iint \sqrt{E_tG_t - F_t^2}\,du\,dv$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) = -2\int_{\Delta} \boxed{H(u,v)}\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

$$\frac{d}{dt}E_t = 2\langle p_u, \dot{p}_u\rangle = -2L\,dt$$

であることを示しなさい．ただし $E$, $F$, $G$ は $p$ の第一基本量，$H$ は平均曲率である．

# 本日の課題の提出締切は

2022 年 1 月 11 日（火曜日）07:00 JST

次回講義は 1 月 20 日です