幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス曲率・平均曲率の意味

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/06

曲線の法曲率

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；
ν：p の単位法ベクトル場；
$\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$：固定

$\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$：曲面上の曲線，$\gamma(0) = \mathrm{P}$；

- t が γ の弧長 $\Leftrightarrow \dot{u}^2E + 2\dot{u}\dot{v}F + \dot{v}^2G = 1$
- このとき

$$(\text{法曲率}) := \gamma'' \cdot \nu = \dot{u}^2L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2N.$$

法曲率

定義

- $\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$：曲面の P における接ベクトル
- $\gamma(t)$：曲面上の弧長 t をパラメータとする曲線で $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v}$ となるもの

このとき γ の $t = 0$ における法曲率を
曲面の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率とよび $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ とかく.

定理

曲面上の点 P における法曲率の最大値・最小値は主曲率である.

主方向

定義

- $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率となるとき $\boldsymbol{v}$ の方向を主方向とよぶ.
- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ なるとき $\boldsymbol{v}$ の方向を漸近方向とよぶ.

命題

主曲率 λ に対応する主方向のベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$$

と書くと, ${}^t(\alpha, \beta)$ は A の λ-固有ベクトル.

主方向

2つの主曲率が一致するような曲面上の点を臍点という.

定理

臍点でない点において，ふたつの主方向は直交する.

主方向

系

点 P が臍点でないとするとき,

- P = O (座標原点)
- $\nu(u_0, v_0) = {}^t(0, 0, 1)$,
- ${}^t(1, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 0)$ はそれぞれ P における主曲率 λ_1, λ_2 に関する主方向，となるようにできる.

標準形

命題

曲面の点 P における主曲率を λ_1，λ_2 とするとき，P を座標原点に移す $\mathbb{R}^3$ の合同変換と曲面のパラメータ変換により，原点の近傍で曲面は次のようにグラフ表示できる：

$$p(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2).$$

問題 4-1

問題

正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ のすべての点が臍点であるとき，p の像は平面か球面の一部であることを示しなさい.

問題 4-2

問題

極小曲面の臍点はガウス曲率が零となる点であることを示しなさい．さらに，ガウス曲率が負となる極小曲面上の点では漸近方向が直交することを示しなさい．

問題 4-3

問題

弧長 u によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(u)$ の曲率が零点を持たないとき，$p(u,v) := \gamma(u) + v\gamma'(u)$ で与えられる曲面の正則点におけるガウス曲率は零である（問題 3-2）．この状況で，p の第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるようなパラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ を求めなさい．

問題 4-4

問題

領域 D 上で定義された正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル ν をとり，実数 t に対して $p_t := p + t\nu$ とおく．有界領域 $\Delta \subset D$ において

- 正の数 ε で，任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $p_t\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えるようなものが存在することを示しなさい．
- $p_t(\overline{\Delta})$ （$|t| < \varepsilon$） の面積を $A(t) := \mathcal{A}_{p_t}(\overline{\Delta})$ と書くとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) = -2\int_{\overline{\Delta}} H(u,v)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

であることを示しなさい．ただし E, F, G は p の第一基本量，H は平均曲率である．