2022 年 1 月 6 日 (2022 年 1 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 4

■お知らせ

- あけましておめでとうございます．今回は 33 名の方から課題の提出がありました．
- 来週 **1 月 13 日（木）は月曜日の時間割**です．次回は 1 月 20 日（木）．
- 1 月 10 日は祝日（成人式の方，おめでとう）なので，課題提出期限は **1 月 11 日（火）07:00 JST** とします．

■前回の補足

- 主曲率に対応する固有ベクトルの意味についての質問が複数．今回説明します．
- 平均曲率とガウス曲率で曲面は決まるのか，というご質問が複数．問題 2-2 がその反例になっていることを 12 月 23 日の黒板 C 16 ページの説明の際に述べた．また，第一基本形式・第二基本形式から曲面が決まるか，というご質問もあった．決まる，というのが「曲面論の基本定理」で，1 月に説明する，と第 2 回講義で述べている．
- 補題 3.7 の $f_x(0,0)=0$ はどう示すのか，という質問が 2 件．$\tilde{p}_x(0,0)$ は $\nu=\pm{}^t(0,,0,1)$ に直交するから．
- ワインガルテン行列の固有値が実数であることを講義では特別なパラメータ（グラフ表示）を用いて示したが，次のようにやるとできる，というご指摘がありました．これもよいですね：$\lambda\in\mathbb{C}$ と $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^2$ $(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ が $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たすならば $\bar{\lambda}{}^t\bar{\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{\lambda\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{A\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{\widehat{I}^{-1}\,\widehat{\mathit{II}}\,\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^t\widehat{\mathit{II}}\,{}^t\widehat{I}^{-1}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,\widehat{\mathit{II}}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\widehat{I}^{-1}\,\widehat{\mathit{II}}\,\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,A\boldsymbol{x}={}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda{}^t\bar{\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}$．$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ より ${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,\widehat{I}\,\boldsymbol{x}\neq 0$ なので $\bar{\lambda}=\lambda$，すなわち λ は実数である．

■前回までの訂正

- 講義資料 3, お知らせ，第 3 項：12 月 28 日 ⇒ 12 月 27 日
- 講義資料 3, 4 ページ，補題 3.7 の証明 1 行目：$(u_0,v_)$ ⇒ (u_0,v_0)
- 講義資料 3，4 ページ，例 3.9：$K=-\operatorname{sech}^2 u$ ⇒ $K=-\operatorname{sech}^4 u$
- 20211223 黒板 B, 3 ページ右下（立体射影の逆写像の第 3 成分）：$\frac{u^2-v^2+1}{1+u^2+v^2}$ ⇒ $\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}$
- 20211223 黒板 C, 11 ページ，第二基本行列の (2.2)-成分：f_{xx} ⇒ f_{yy}

■授業に関する御意見

- 課題を解説する際に，答えを明示する場合としない場合がありますが，統一的に解答をいただけるようにしてくれませんでしょうか．後でもう一度計算する際に答えがあっているか確認したいので．　**山田のコメント：**なるほど．
- 曲線，曲面のイメージするの難しい．　**山田のコメント：**イメージにこだわりすぎるのは良くないかも．
- 第二基本行列を表記する際，資料では II と上下の横棒が離れた表記となっていますが，$\widehat{\mathrm{II}}$ と上下の横棒がつながってる表記でも大丈夫ですか．　**山田のコメント：**区別していません．
- E, F, G, L, M, N, $\widehat{I}$, $\widehat{\mathit{II}}$ の幾何学的意味を教えて欲しいです．又具体例も付していただきたいです．
  山田のコメント：内積の表現行列，というのは「幾何学的意味」です．長さや角度と関連するというのも何回か講義で述べましたね．これもそう．第二基本量については，p_{uu} など 2 階微分の法線成分という話も少しだけしたはず．どういう説明だと「幾何学的意味」と感じていただけますか？ 講義資料，教科書に具体例がたくさん挙げられていますが，それをすべて検討した上で「具体例をつけよ」というご希望でしょうか．どのようなものを具体例とお考えでしょうか．
- 3-1 の最後の微分方程式の解の一意性について説明して欲しいです．解は殆ど感でたまたま運良く見つけることができました．
  山田のコメント：ただの「置換積分」です．
- 3-3 が解けませんでした．美しく対称性があるので，キレイだなと思ったのですが，計算が爆発してしまい，諦めました．詳細で分かり易い解説を期待しています．よろしくお願いします．　**山田のコメント：**あなたにとって詳細か，わかりやすいかはわかりませんが解説します．グラフ表示の基本量を陰関数の微分公式をつかって求めるだけです．
- メリークリスマス & 良いお年をお過ごしください．　**山田のコメント：**あけましておめでとうございます．
- 来年もよろしくお願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ．

■質問と回答

質問 1： ワインガルテン行列の固有値の 2 つが異なる場合，主曲率は 2 つあると考えますか？　**お答え：**はい．

質問 2： $\nu(u,v)$ の符号を $+$ にしたときと $-$ にしたときでは主曲率と平均曲率の符号が変わる（ガウス曲率は変わらない？）と思うのですが符号が変わってしまうこと自体は重要ではないのでしょうか．　**お答え：**なので，ν を明示しておくのがよい．なお，$H\nu$ は ν のとり方によらない．これを平均曲率ベクトルという．ところで ν の「符号」とは？

質問 3： $\det(\widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}) = \det(\widehat{II}\,\widehat{I}^{-1})$, $\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\widehat{II}\,\widehat{I}^{-1})$ が成り立ちますが，ワインガルテン行列を $\widehat{II}\,\widehat{I}^{-1}$ と定義すると不都合が生じることがありますか？ **お答え：**ワインガルテンの公式が成り立たない．

質問 4： 平均曲率 $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$ は式より A_{11} と A_{22} の平均を表しているとみなせますが，A_{11} と A_{22} にはどのような意味があるのでしょうか？ **お答え：**ワインガルテン行列は，行列として意味があるようにまとめている．成分にも意味づけはできる（ν_u を p_u, p_v の線形結合で表したときの p_u の係数 $\times(-1)$ が A_{11}）が，行列としての意味が重要．

質問 5： ガウス曲率が 0 のときのみ成立する性質はどのようなものがありますか． **お答え：**一点で？ それとも恒等的に？

質問 6： 等温座標系は複素関数の等角写像と関係があるのでしょうか．

お答え： はい．座標系 (u, v) と (ξ, η) がともに等温座標系とすると，パラメータ変換 $(\xi, \eta) \mapsto (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ $\xi\eta$-平面上の領域から uv-平面上の領域への等角写像となる．とくに，パラメータ変換のヤコビ行列式が正（向きを保つパラメータ変換）ならば，$\xi + \sqrt{-1}\eta \mapsto u + \sqrt{-1}v$ は複素関数として正則．

質問 7： 極小曲面として懸垂曲面や常螺旋面，平面が存在することは分かりましたが，他にもなんらかの名前の付いた特徴的な極小曲面はあるでしょうか？ **お答え：**問題 3-1，テキスト §8.

質問 8： 平均曲率が 0 のとき極小曲面といい，調べてみたら物理的に安定になるという特徴があるらしいのですが，ガウス曲率や主曲率が特別な値のときにもなにか特徴はありますか？ **お答え：**「安定」はどういう意味で使っていますか？ どこかで例を挙げる．

質問 9： 曲面のある点における 2 つの主曲率は，その点を通り，曲面に乗った 2 つの曲線の曲率と関係ありますか？ **お答え：**はい．

質問 10： 主曲率に対応するワインガルテン行列の固有ベクトルには幾何学的意味はあるのですか． **お答え：**はい．主方向．

質問 11： 問題 3-2 では $\begin{vmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{b} \\ 1 & \kappa t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ を使って法線を計算しました．この式は $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ が正規直交でないときにも使えますか？

お答え： いいえ．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e}$ が成り立っていなければなりません．

質問 12： ワインガルテン行列の固有値の平均 H を平均曲率と定義していますが，なぜ固有値の平均を取るのでしょうか．またどのような曲面を表しているのでしょうか？

お答え： 2 次行列なので固有値を定めることと，固有値の基本対称式を定めることは同値．後半の意味がわかりません．

質問 13： 平均曲率を $\frac{1}{2}\operatorname{tr} A$ でなく $\operatorname{tr} A$ と定義していることもあるとおっしゃいましたが，その場合，“平均” の言葉はどこに含まれるのですか？ **お答え：**おっしゃる通りですが，定数倍を気にしない人もいる．

質問 14： ガウス曲率，平均曲率，主曲率はどれも合同変換やパラメータ変換で不変だと思いますが，この 3 つを使い分ける必要のある状況が分かりませんでした．これは次回以降に取り扱うのでしょうか． **お答え：**不変性が共通だからといって持っている情報が同じとは限らないのでは？ いずれにせよこれらの値は一般に異なるので意味があります．

質問 15： $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ の場合，二つの法線が存在しますか？ どのように法線を求めますか．

お答え： 曲面上の各点で接平面に直交するベクトル全体は 2 次元空間になります．これを「法平面」としてそのまま扱うのが自然．計算の際は法平面の基底をとったりもするが，基底のとり方によらない量を考えたい．

質問 16： $\widehat{I}$ の固有値が正のあたりから $\widehat{I}$ は接平面にキテイ $\{p_u, p_v\}$ をとったときに接平面における内積のグラム行列になっているということでしょうか．$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれていたらこういうふうに $\mathbb{R}^3$ の内積から接空間に内積を入れるのは自然にできますが，一般の多様体で（計量を入れられそうなときに）自然な入れ方ってあるんですか？

お答え： 前半：$\widehat{I}$ は $\{p_u, p_v\}$ に関するグラム行列です．定義そのものでは？「固有値が正のあたりから」というのがよくわかりません．後半：ない．個々の多様体にはあることもあるが「一般」では「自然な計量」の定義が困難．なお可微分多様体（パラコンパクト性は仮定する）にリーマン計量は必ず存在します．

質問 17： 固有値がパラメータ変換で不変だと分かったが，固有値と直感的な曲がり方との関係がわからなかったので，関係があれば知りたいです． **お答え：**なんの固有値のことでしょう．

質問 18： 第二基本行列がグラフ表示では，Hesse 行列の定数倍（原文ママ：スカラ倍と呼んだほうがよい）となっていました．第二基本行列は曲面の “凸性” を決める量だということになりあすか？ また，長さや面積，角度の情報をもった第一基本行列の逆行列と第二基本行列の積であるワインガルテン行列およびそこから派生する幾つかの値は局面（原文ママ：曲面）のどのような性質を反映するのか興味深いです． **お答え：**前半：はい．後半：たとえばワインガルテンの公式．

質問 19： 第二基本行列は Taylor 展開の 2 次の項であることがグラフ表示からわかりました．一方で第一基本行列は $dp \cdot dp$ 以外にどんな意味づけがされるのでしょうか． **お答え：**接ベクトル空間の内積の基底 $\{p_u, p_v\}$ に関する表現行列，と前回説明した．

質問 20： ワインガルテン行列がガウス曲率や平均曲率を定めており，幾何学的に意味のある量なのは理解できたが $\widehat{I}$ や $\widehat{II}$，ds^2, II の意味はわからなかった．ワインガルテン行列を介さずに $\widehat{I}$ などから直接いえる幾何学的性質はないのか．

お答え： $\widehat{I}$, ds^2 についてはすでに長さ，面積，角度などを説明したはず．II は接ベクトル空間上の 2 次形式で，講義資料 3, 4 ページのようなグラフ表示の 2 次の係数を表している．

質問 21： $\mathbb{R}^n$ 上でも第一，第二基本形式は定義され得るのでしょうか． **お答え：**$\mathbb{R}^n$ の何に対してでしょう．

質問 22： ホテリング・ワイルの定理なるものを微分幾何の定理だとどこかで聞きました．自分では面積，体積を求める 1 つの公式というくらいの認識なのですが，本講義では扱わないのでしょうか？ もし扱わないのであれば，どういったところで扱うのかを教えて欲しいです． **お答え：**パップス・ギュルダンの定理の一般化（管状近傍の体積公式）ですね．以前，演習問題でパップス・ギュルダンの定理を挙げたことがありますが，今回は扱いません．いずれにせよ演習問題程度です．

質問 23： ガウス曲率や平均曲率に曲率という言葉が入っているのですが，曲率の曲率と何らかの関係や共通点があるのですか．

お答え： 曲率の曲率？

4 ガウス曲率・平均曲率の意味

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級正則曲面，ν を p の単位法ベクトル場とする．さらに $(u_0, v_0) \in U$ を一つ固定し，$\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ としておく．

■ガウス曲率・平均曲率・主曲率（復習） 正則曲面 p の第一・第二基本行列は次のように定義された：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正，とくに $\det \widehat{I} > 0$ なので，次のように**ワインガルテン行列** A が定義される：

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

事実 4.1.
- ワインガルテン行列 A の固有値 λ_1, λ_2 は実数である（主曲率）.
- A の固有値は曲面のパラメータのとり方によらない.
- ワインガルテンの公式 $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

定義 4.2. ワインガルテン行列 A の固有値の積 K を**ガウス曲率**，固有値の平均 H を**平均曲率**という：$K := \det A = \det \widehat{I\!I} \,/\, \det \widehat{I}$, $H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$.

■法曲率と主曲率 曲面上の曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が $t = 0$ で $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ を通るとする．とくに t が γ の弧長パラメータとすると，$1 = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 = |\dot{u}p_u + \dot{v}p_v|^2 = \dot{u}^2E + 2\dot{u}\dot{v}F + \dot{v}^2G$ が成り立っている．このとき $\ddot{\gamma}(0) \cdot \nu(u_0, v_0)$ を γ の P における**法曲率**という：

命題 4.3. 法曲率は曲線の速度ベクトルのみに依存し，加速度ベクトルには依存しない.

> **証明：** チェイン・ルールより $\ddot{\gamma} = (\dot{u})^2 p_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}p_{uv} + (\dot{v}^2)p_{vv} + \ddot{u}p_u + \ddot{v}p_v$ となるが，p_u, p_v は ν と直交する．具体的には $\ddot{\gamma} \cdot \nu = \dot{u}^2L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2N$.

そこで $\boldsymbol{v} := \dot{\gamma}(0) = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$,（$|\boldsymbol{v}| = 1$）となる曲線 γ の P における法曲率を「点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率」とよび

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N, \qquad \bigl(|\boldsymbol{v}|^2 = \alpha^2E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G = 1\bigr)$$

と書く．ただし E, F, G, L, M, N は (u_0, v_0) における値.

定理 4.4. 曲面上の点 P における法曲率の最大値・最小値は主曲率である.

> **証明：** 関数 $h(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\,\widehat{I\!I}\,\binom{\alpha}{\beta}$ の，条件 $g(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\,\widehat{I}\,\binom{\alpha}{\beta} = 1$ のもとでの最大・最小問題である．条件を満たす (α, β) の組全体は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合だから，最大・最小値の存在は保証されるので，あとはラグランジュの未定係数法を用いればよい.

二つの主曲率が一致する点を**臍点**（せいてん, umbilic point）という．臍点でない点における主曲率 λ_1, λ_2 に対して，$\kappa(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j$ $(j = 1, 2)$ となる $\boldsymbol{v}_j$ を**主方向**という．主方向を $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_u + \beta_j p_v$ とおくと，${}^t(\alpha_j, \beta_j)$ はワインガルテン行列 A の固有値 λ_j に関する固有ベクトルである.

2022 年 1 月 6 日 (2022 年 1 月 20 日訂正)

定理 4.5. 曲面上の点 P が臍点でないとき，二つの主方向は直交する．

証明： 補題 3.7 のようなグラフ表示 $p(x,y) = {}^t(x,y,f(x,y))$ ($f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$) の原点において確かめればよい．ワインガルテン行列 $A(0,0)$ は f の原点におけるヘッセ行列だからとくに対称行列．したがって，二つの異なる固有値（主曲率）に対応する固有ベクトル ${}^t(\alpha_1,\beta_1)$, ${}^t(\alpha_2,\beta_2)$ は直交するので，対応する主方向 $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_x(0,0) + \beta_j p_y(0,0) = {}^t(\alpha_j,\beta_j,0)$ は互いに直交する．

系 4.6. 点 P が臍点でないとするとき，(1) P = O (座標原点)，(2) $\nu(u_0,v_0) = {}^t(0,0,1)$，(3) ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,0)$ はそれぞれ P における主曲率 λ_1, λ_2 に関する主方向，となるようにできる．

この状況で，曲面を $\tilde{p}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ とグラフ表示すると，次が成り立つ：

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2+y^2) \qquad ((x,y)\to(0,0)).$$

■漸近方向 $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる接ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向を**漸近方向**という．$K(\mathrm{P}) > 0$ となる点 P では漸近方向は存在しない．また $K(\mathrm{P}) < 0$ なら二つの漸近方向が存在する．

補題 4.7. $\boldsymbol{v} = \alpha p_u + \beta p_v$ が漸近方向を与えるための必要十分条件は $\alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N = 0$.

例 4.8.
- 点 P でガウス曲率が正ならば，P の十分近くで曲面の像は P における曲面の接平面 Π_{P} の一方の側にある．
- 点 P でガウス曲率が負ならば，Π_{P} と曲面の像の共通部分は，P の十分近くでは Π_{P} 上の P で交わる 2 本の曲線で，それらの P における接線の方向は漸近方向である．

問題

4-1 正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ のすべての点が臍点であるとき，p の像は平面か球面の一部であることを示しなさい．

4-2 極小曲面の臍点はガウス曲率が零となる点であることを示しなさい．さらに，ガウス曲率が負となる極小曲面上の点では漸近方向が直交することを示しなさい．

4-3 弧長 u によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(u)$ の曲率が零点を持たないとき，$p(u,v) := \gamma(u) + v\gamma'(u)$ で与えられる曲面の正則点におけるガウス曲率は零である（問題 3-2）．この状況で，p の第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるようなパラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ を求めなさい．

4-4 領域 D 上で定義された正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル ν をとり，実数 t に対して $p_t := p + t\nu$ とおく．有界領域 $\Delta \subset D$ において
- 正の数 ε で，任意の $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して $p_t\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えるようなものが存在することを示しなさい．
- $p_t(\overline{\Delta})$（$|t| < \varepsilon$）の面積を $A(t) := \mathcal{A}_{p_t}(\overline{\Delta})$ と書くとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) \left(= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Delta} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \right) = -2\int_{\Delta} H(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

であることを示しなさい．ただし E, F, G は p の第一基本量，H は平均曲率である．