幾何学概論第二 (MTH.B212)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/20

お知らせ

- 今回は 27 件の課題提出がありました.
  T2SCHOLA にてフィードバックしています.
- 来週 1 月 27 日に定期試験の予告を行います.

質問から

Q: ワインガルテン行列 A の対角化可能性について.

臍点（主曲率（Aの固有値）が重根）　問題4-1

㊀ $A = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$　自明でない

Aが対角化可能 $\Leftarrow$ 固有値がすべて単根

$\Leftarrow$ 実対称行列：固有値は実数

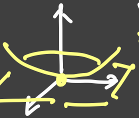
一般にAは対称行列ではない.　$\hat{I}^{-1}\hat{II} = A$

Aは対称行列に共役（相似）　パラメータ変換 $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$：対称

P
合同変換で不変

$\hat{I} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{II} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$, $f_{xy} = f_{yx}$



$z = f(x,y)$

$f_y(0,0) = 0$

$f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$

A：対称行列に共役 $\Rightarrow$ 対角化可能

固有値：λの重根

$\Rightarrow {}^{\exists}Q \qquad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$

$\underline{\underline{A}} = \lambda QIQ^{-1} = \underline{\underline{\lambda I}}$

質問から

Q: 平面曲線のアナロジーとして，曲面を球面で近似できないか.

臍点の近くでは近似できる

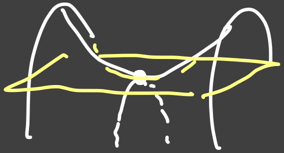
$$z = \frac{\lambda_1}{2}x^2 + \frac{\lambda_2}{2}y^2 + \cdots$$

$$z = f(x,y) = \frac{\lambda}{2}(x^2+y^2) + \cdots$$

球面をグラフ表示するとこの形になる

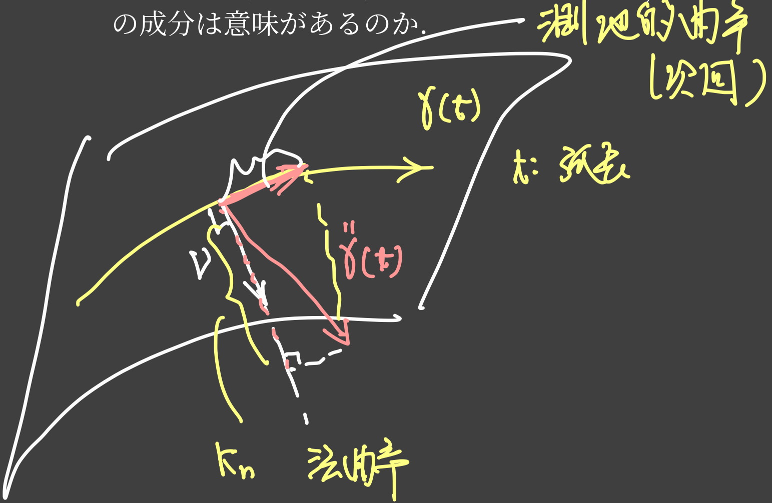
$$z = R - \sqrt{R^2-x^2-y^2} \qquad R>0$$

一般に主曲率は互いに異なるので
球面で2次近似はできない



質問から

Q: 曲面上の曲線の加速度ベクトルの，曲面の法線方向の成分の（符号付き）大きさが法曲率だが，接方向の成分は意味があるのか．



質問から

Q: ガウス曲率・平均曲率が発散することはありますか．

Q: ガウス曲率は平均曲率が発散することはありますか？ 特異点に近づくときに発散したりするのでしょうか？

A: 正則曲面では発散しない．なぜなら well-defined だから．特異点ではどうか，
$p(u,v) = {}^t(au^2+v^2, bv^2+v^3, u)$（$a$, b は定数）で確かめてみよう．

$v=0$ にとくい点を持つ

質問から

Q: 主曲率でガウス曲率と平均曲率を表せるので，主曲率のみ定義してもよいのではないかと思いました．後半２つも定義しているのはどうしてでしょうか．

A: 主曲率の積，和が特別な性質を持っている．

講義

この後，短い休憩をとり，2 つの「講義」を行います．
質問などをチャットで行なう場合は，全員宛てにしてください

1 復習

2 曲面論の基本定理